الصف العاشر — الفصل الدراسي الثاني — حل كراسة التمارين
الرياضيات

تمرين ٦-١

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

مماس الدائرة
Tangent of The Circle

المجموعة الثانية

في التمرينين (١ – ٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، م مركز كل دائرة. أوجد قيمة س.

(١)

∵ $\overline{ك ن}$ مماس
، $\overline{م ن}$ نصف قطر
∴ ق(∠م ن ك) = ٩٠°

وبالمثل ق(∠م ك ل) = ٩٠°

∴ ق(∠ن م ك) = ٣٦٠ − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠) = ١٢٠°

∴ س = ١٢٠°

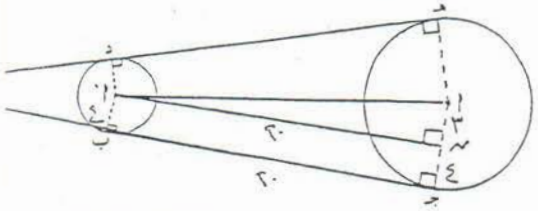
(٢)

∵ $\overline{ل ن}$ مماس
، $\overline{م ن}$ نصف قطر
∴ ق(∠ل ن م) = ٩٠°

∴ س = ٩٠ − ٤٢°
= ٤٨°

(٣) يلتف حزام حول الدائرتين كما في الشكل.

أثبت أن ب ج = د هـ.



العمل: نرسم $\overline{هـ ك}$ ، $\overline{د ك}$ حيث يتقاطعان في م

البرهان: $\overline{م هـ}$ ، $\overline{م ج}$ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها م ∴ م ج = م هـ ... ①

، $\overline{م ك}$ ، $\overline{م د}$ " " " مركزها م ∴ م د = م ك ... ②

بطرح ② من ① ∴ د هـ = ك هـ

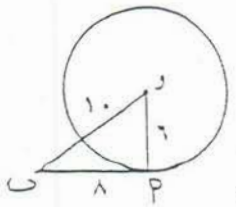
(٤) في التمرين (٣)، أوجد أ ب إذا كان أ جـ = ٧ سم، ب جـ = ٢٠ سم.

∵ $\overline{م ن} \perp \overline{ن ك}$ ، ق(∠م ن ك) = ٩٠°

في ∆ م ن ك: ن ك = $\sqrt{٢٠^٢ + ٣^٢}$ = $\sqrt{٤٠٠ + ٩}$ = $\sqrt{٤٠٩}$ = ٢٠٫٢ سم

في التمرينين (٥ – ٦)، حدد ما إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التي مركزها و.

(٥)

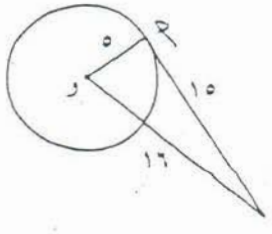


(ب د)^٢ + (د و)^٢
= ٦^٢ + ٨^٢ = ١٠٠
(ب و)^٢ = ١٠^٢ = ١٠٠

∴ ق(∠د) = ٩٠°

∴ المستقيم مماس للدائرة

(٦)



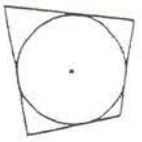
(و د)^٢ + (د ب)^٢
= ٥^٢ + ١٥^٢ = ٢٥٠
(و ب)^٢ = ١٦^٢ = ٢٥٦

∴ ق(∠د) ≠ ٩٠°

∴ المستقيم ليس مماسًا للدائرة

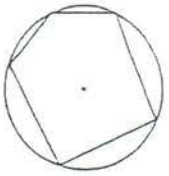
في التمرينين (٧—٨)، حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

(٧)



داخلة

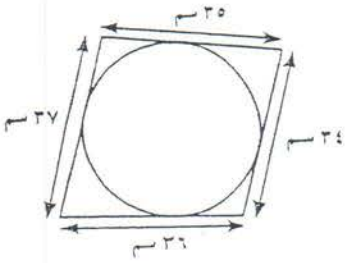
(٨)



خارجة

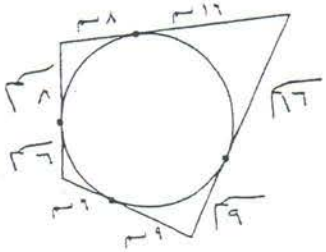
في التمرينين (٩—١٠)، يحيط كل مضلع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

(٩)



محيط المضلع = ٣٦ + ٣٧ + ٣٥ + ٣٤ = ١٤٢ سم

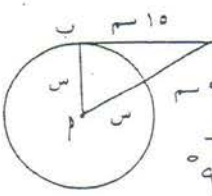
(١٠)



محيط المضلع
= ٩ + ٩ + ٦ + ٦
+ ٨ + ٨ + ١٦ + ١٦
= ٧٨ سم

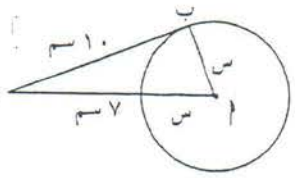
في التمرينين (١١—١٢)، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س (مقربًا إجابتك لأقرب جزء من عشرة).

(١١)



∵ $\overline{حـ ب}$ مماس
، $\overline{م ب}$ نصف قطر
∴ ق(م ب حـ) = ٩٠°
∴ (س + ٩)^{٢} = س^{٢} + ١٥^{٢}
∴ س = ٨ سم

(١٢)

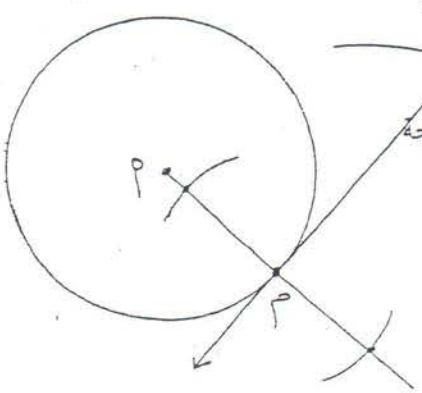


∵ $\overline{حـ ب}$ مماس ، $\overline{م ب}$ نصف قطر
∴ ق(م ب حـ) = ٩٠°
∴ (س + ٧)^{٢} = س^{٢} + ١٠^{٢}
∴ س = ٦٫٣ سم

(١٣) يحيط شكل سداسي منتظم بدائرة طول قطرها ١٠ سم فإن محيط المضلع هو حوالى:

(أ) ٣٠ سم (ب) ٣٤,٦ سم (جـ) ٤٣,٣ سم (د) ٥١,٧ سم

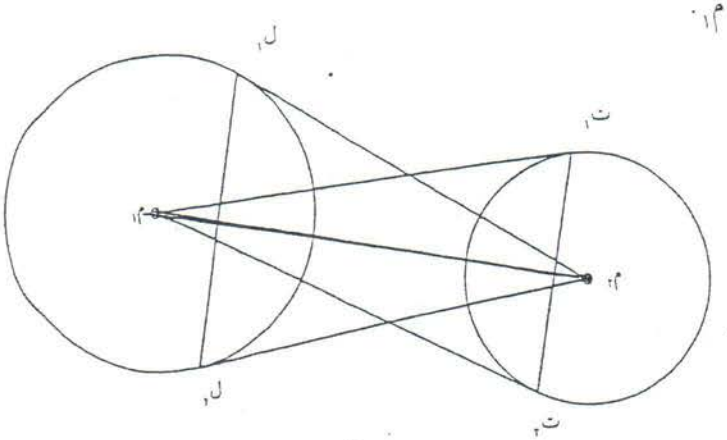
(١٤) الإنشاءات: ارسم دائرة مركزها أ، ضع نقطة م على الدائرة.
أنشئ مماسًا على الدائرة في م مستخدمًا الفرجار ومسطرة غير مدرجة.



(١٥) التحدي: يبيّن الشكل دائرتين مركزيهما م١، م٢. $\overline{م_1ت_1}$، $\overline{م_2ت_2}$ مماستان للدائرة التي مركزها م٢.

$\overline{م_2ل_1}$، $\overline{م_2ل_2}$ مماستان للدائرة التي مركزها م١.

أثبت أن $\overline{ت_1ت_2}$ // $\overline{ل_1ل_2}$.



∵ $\overline{م_1ك}$ ⊥ $\overline{ك_1ت_1}$ ، $\overline{م_2ت_2}$ ⊥ $\overline{ت_1ت_2}$ مماسان للدائرة م٢

∴ $\overline{م_1ك}$ // $\overline{ت_1ت_2}$ ... (١)

وبالمثل $\overline{م_1ل_1}$ // $\overline{م_2ل_2}$ ... (٢)

من (١)، (٢) ⇐ $\overline{ت_1ت_2}$ // $\overline{ل_1ل_2}$

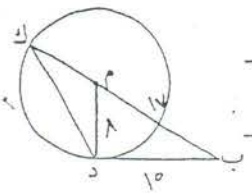
(١٦) التحدي: ب د تمس الدائرة التي مركزها م. $\overline{ب_1د}$ مماس، $\overline{م_2د}$ نصف قطر

ب د = ١٥ سم، ب م = ١٧ سم. ∴ ق(∠ب د م) = ٩٠°

(أ) أوجد طول نصف قطر الدائرة. ∴ نق = $\sqrt{١٧^٢ - ١٥^٢}$ = ٨

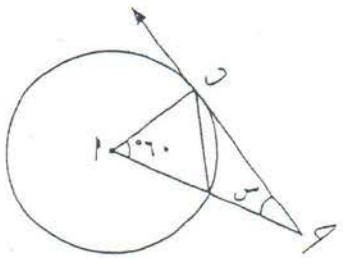
(ب) أوجد مساحة المثلث ب ك د. = $\frac{1}{2}$ × ب د × ك د

= $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ١٧ × $\frac{٨}{١٧}$ = ٨٨٫٢٤



المجموعة ت: تمارين تعزيزية

(١) المستقيم في الشكل المقابل مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

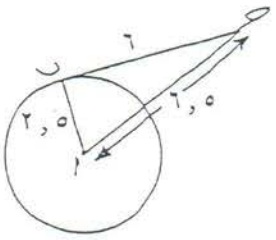


$\overline{ب_1جـ}$ ⊥ $\overline{أ_1ب}$ ، $\overline{أ_2ب}$ نصف قطر

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

∴ س = ٩٠ − ٦٠ = ٣٠°

(٢) حدّد ما إذا كان المستقيم مماس للدائرة.



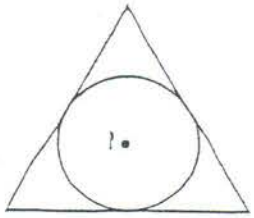
(أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢ = (٦٫٥)^٢ + ٦^٢ = ٤٢٫٢٥

(أ ب)^٢ = (٦٫٥)^٢ = ٤٢٫٢٥

∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

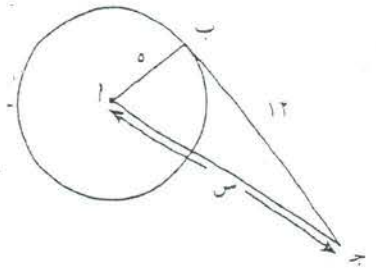
∴ المستقيم مماس للدائرة

(٣) حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمثلث (داخلة) أو محيطة بمثلث (خارجة).



داخله

(٤) المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة، أوجد قيمة س.



$\overline{ب جـ}$ مماس ، $\overline{أ ب}$ نصف قطر

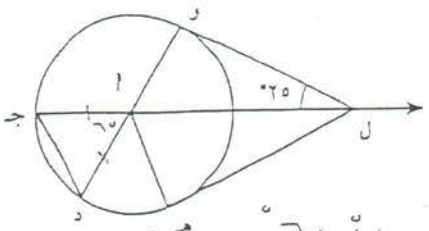
$\therefore$ ق$(أ\hat{ب}جـ) = ٩٠°$

$\therefore$ $س^٢ = ٥^٢ + ١٢^٢ = ١٦٩$

$س = ١٣$

(٥) في الشكل المقابل، أوجد ق$(أ\hat{د}جـ)$، ق$(هـ\hat{أ}د)$

إذا كانت $\overline{ل و}$، $\overline{ل هـ}$ تمسان الدائرة حيث $\overline{ود}$ قطر للدائرة.



$\overline{ل و}$ مماس ، $\overline{أ و}$ نصف قطر

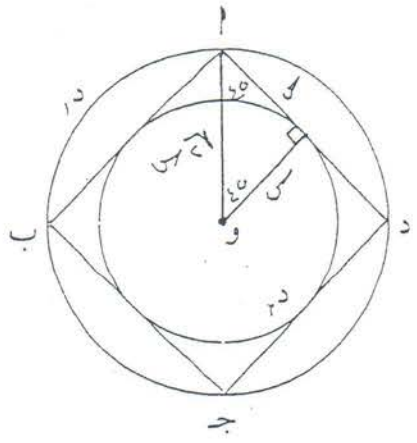
$\therefore$ ق$(أ\hat{و}ل) = ٩٠°$ $\Leftarrow$ ق$(و\hat{أ}ل) = ٩٠° - ٦٥° = ٢٥°$

$\therefore$ ق$(ص\hat{أ}ى) = ٦٥°$ بالتقابل بالرأس ، $\therefore$ ق$(أ\hat{ى}ص) = \frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢} = ٥٧,٥°$

، ق$(هـ\hat{أ}ى) = ١٨٠° - (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°$

(٦) في الشكل المقابل دائرة $د_١$ تحيط خارجًا بالمربع أ ب جـ د ودائرة $د_٢$ محاطة خارجًا بالمربع أ ب جـ د.

أثبت أن مساحة الدائرة $د_١$ تساوي مثلي مساحة الدائرة $د_٢$.



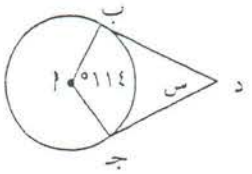
نصف قطر الدائرة $د_١$ = ق$_١$ = $٢٧ س$

، " " الدائرة $د_٢$ = ق$_٢$ = $س$

$\therefore$ $\frac{\text{مساحة الدائرة } د_١}{\text{مساحة الدائرة } د_٢} = \frac{\pi ق_١^٢}{\pi ق_٢^٢} = \frac{(٢٧ س)^٢}{س^٢} = ٢$

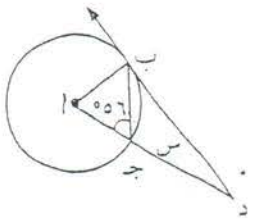
$\therefore$ مساحة الدائرة $د_١ = ٢ \times$ مساحة الدائرة $د_٢$

(٧) إذا كان $\overleftrightarrow{د ب}$ ، $\overleftrightarrow{د جـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =



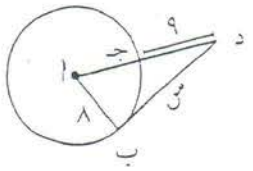
(أ) ٥٢٦ (ب) ٥٥٧ (جـ) ٥٦٦ (د) ٥١١٤

(٨) إذا كان $\overleftrightarrow{د ب}$ مماس للدائرة. فإن س =



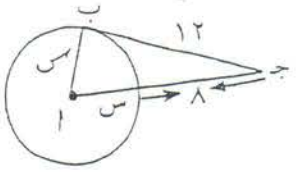
(أ) ٥٢٢ (ب) ٥٢٨ (جـ) ٥٣٤ (د) ٥٤٠

(٩) إذا كان $\overleftrightarrow{د ب}$ مماس للدائرة. فإن س =



(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧

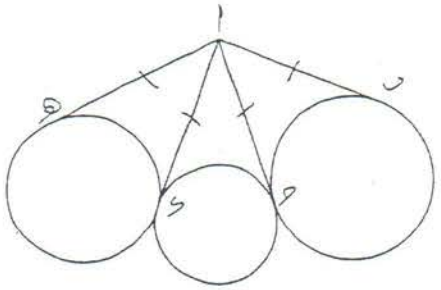
(١٠) إذا كان $\overleftrightarrow{جـ ب}$ مماس للدائرة. فإن س =



(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) يبيّن الشكل ٤ قطع مماسية من نقطة مشتركة أ إلى ٣ دوائر.

ما الذي يمكنك استنتاجه حول أطوال القطع الأربع؟ فسّر.



∵ أب = أجـ ، أجـ = أد ، أد = أهـ

∴ أب = أجـ = أد = أهـ

(١٢) $\overleftrightarrow{ب أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ مماسان للدائرة.

ب جـ مماس ، أجـ نصف قطر

∴ م(ب̂جـ) = ٩٠° وباطل م(ب̂دجـ) = ٩٠°

(أ) أوجد قيمة س.

س = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٨٧٫٩٢°) = ٩٢٫٨°

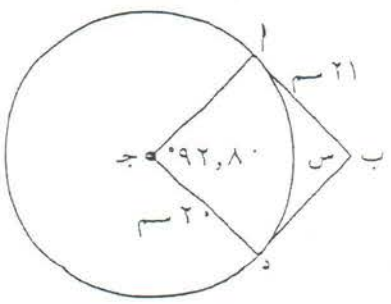
(ب) أوجد محيط الرباعي ب أجـ د.

أجـ = دجـ = ٢٠ سم

ب أ = ب د = ٢١ سم

محيط الرباعي

= ٢١ + ٢١ + ٢٠ + ٢٠ = ٨٢ سم

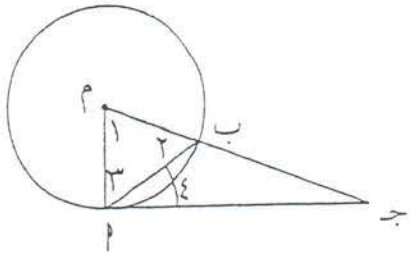


(جـ) أوجد ب جـ.

في △ ب أ جـ

ب جـ = $\sqrt{٢١^٢ + ٢٠^٢}$ = ٢٩ سم

في التمرينين (١٣ - ١٤). $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة في أ. ق(أ) = ٧٠°.



(١٣) أوجد ق(٤).

$\overline{أجـ}$ مماس ، $\overline{أم}$ نصف قطر

∴ ق(∠أم) = ٩٠°

ق(أ) = ٧٠°

∴ ق(٣) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(٤) = ٩٠° - ٥٥° = ٣٥°

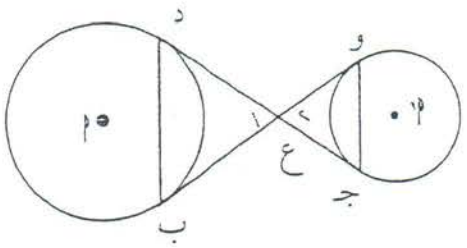
(١٤) إذا كان ق(أ) = س، فأوجد ق(٤) بمعلومية س.

ق(أ) = س

ق(٣) = $\frac{١٨٠° - س}{٢}$ = ٩٠ - $\frac{س}{٢}$

ق(٤) = ~~٩٠~~ - ~~٩٠~~ + $\frac{س}{٢}$ = $\frac{س}{٢}$

(١٥) في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين ع ب د، ع وجـ.



$\overline{عو}$ ، $\overline{عـ}$ مماسان للدائرة م

∴ عو = عـ ∴ $\frac{عو}{عـ}$ = ١

، $\overline{عك}$ ، $\overline{عن}$ مماسان للدائرة ن

∴ عك = عن ∴ $\frac{عك}{عن}$ = ١

△ عدك ، △ عوجـ

ق(أ) = ق(٤) (بالتقابل بالرأس)

$\frac{عو}{عـ} = \frac{عك}{عن}$ (٢)

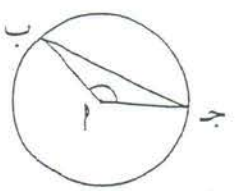
∴ △ عدك ~ △ عوجـ

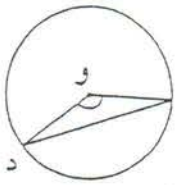
التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs

المجموعة الثانية

(١) ماذا تستنتج من تطابق الدائرتين وتطابق الزاويتين و ، أ في الشكل المقابل؟



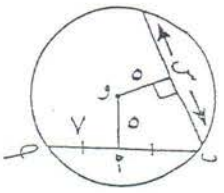


ق(و) = ق(أ) ∴ هـ د = ح ن

، ق(هـ د) = ق(ح ن)

(٢) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)



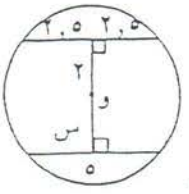
ص ع = ع ن ∴

و ع ⊥ ص ن

∴ البعد = البعد

∴ س = ١٤

(ب)

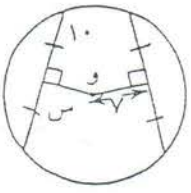


الوتر = الوتر

∴ البعد = البعد

∴ س = ٢

(جـ)

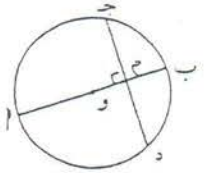


الوتر = الوتر

∴ البعد = البعد

∴ س = ٧

(٣) مستخدمًا الشكل المقابل أكمل ما يلي:

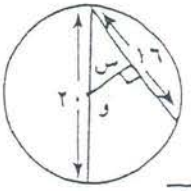


معطى: $\overline{أب}$ قطر الدائرة، $\overline{أب} \perp \overline{جـ د}$. ماذا تستنتج؟

ع م = م ح ، $\overset{\frown}{ن ص} = \overset{\frown}{ن ك}$

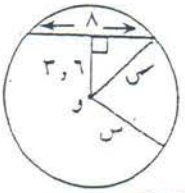
(٤) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:

(أ)



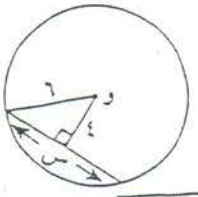
$س = \sqrt{١٠^٢ - ٨^٢} = ٦$

(ب)



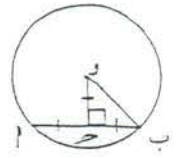
$س = \sqrt{٤^٢ + (٣,٦)^٢} = ٥,٣٨$

(جـ)



$س = \sqrt{٦^٢ - ٤^٢} = ٤,٩٨$

(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

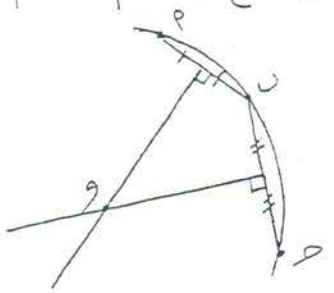


$\overline{و ح} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ق(∠ب و ح) = ٤٥°

∴ أ ح = ح ب ∴ ق(∠ب و أ) = ٩٠°

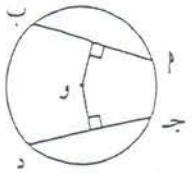
∴ ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٩٠°

* (٦) علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من طبق دائري الشكل. اشرح كيف يستطيع هذا العالم استخدام قطعة واحدة لإيجاد مركز وطول نصف قطر هذا الطبق الدائري.



نأخذ ٣ نقاط م، ن، ح على قوس القطعة
ثم نرسم محورا لكل من م ن، ن ح يتقاطعان في و
و هي مركز هذا الطبق الدائري
طول و م هو طول نصف قطر الدائرة

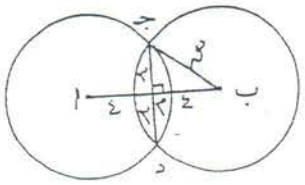
(٧) تحليل الخطأ: نظر سلطان إلى الشكل المقابل واستنتج أن $\overline{أب} \cong \overline{جد}$. ما الخطأ في استنتاجه؟



الخطأ أن البعد ≠ البعد

(٨) ا، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{جد}$ وتر مشترك للدائرتين.

(أ) إذا كان $\overline{أب}$ = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟



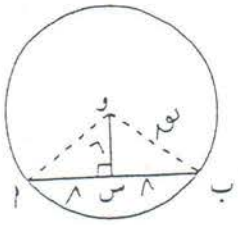
$\overline{م ن} \perp \overline{جـ د}$ ، جـ م = م د = ٣

م ن = م ا = ٤ ∴ ا م = $\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}$ = ٥ سم

(ب) إذا كان $\overline{أب}$ = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول $\overline{جد}$؟

جـ د = ٢ × $\sqrt{١٣^٢ - ١٢^٢}$ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

(٩) في الشكل المقابل، $\overline{أب}$ = ١٦ سم، وس = ٦ سم. أوجد:



(أ) طول نصف قطر الدائرة؟ $\overline{وس} \perp \overline{أب}$ ∴ ا س = س ب = ٨ سم

∴ ا و = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

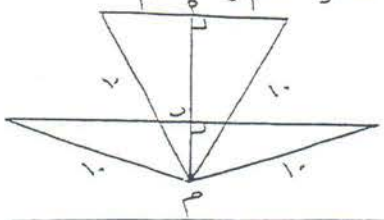
(ب) قياس القوس الصغير $\overset{\frown}{أب}$.

ق(∠ ا و س) = ظا$^{-١}$ $\frac{٨}{٦}$ = ٥٣٫١٣°

∴ ق(∠ ا و ب) = ٢ × ٥٣٫١٣° = ١٠٦٫٢٦°

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٠٦٫٢٦°

(١٠) تفكير ناقد: طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم، وطولا وترين موازيين لهذا القطر ١٦ سم و ١٦ سم.



أوجد أقصر مسافة بين الوترين لأقرب جزء من عشرة من السنتمتر.

(أ) إذا كان الوتران في جهة واحدة من المركز.

م د = $\sqrt{١٠^٢ - ٨^٢}$ − $\sqrt{١٠^٢ - ٣^٢}$ = ٣٫٤ سم

(ب) إذا كان الوتران في جهتين مختلفين من المركز.

م د = $\sqrt{١٠^٢ - ٨^٢}$ + $\sqrt{١٠^٢ - ٣^٢}$ = ١٥٫٥٣ سم

(١١) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا :

(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

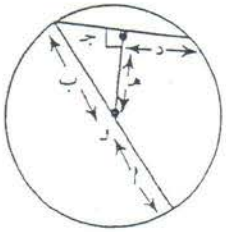
البعد = $\sqrt{(\text{نق})^2 - 8^2} = \sqrt{\quad}$ سم

(١٢) البعد بين مركز الدائرة ووتر طوله ٩ سم يساوي ١١ سم تقريبًا.

أوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب عدد كلي.

∴ نق = $\sqrt{11^2 + (4{,}5)^2} = 12$ سم

(١٣) أي مما يلي لا تستطيع استنتاجه من الرسم المقابل؟

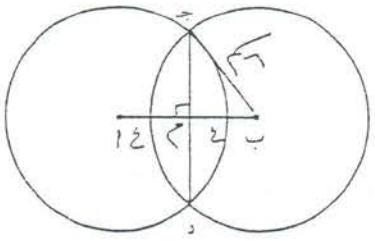


(أ) جـ = د (ب) أ = ب (جـ) جـ^2 + هـ^2 = ب^2 (د) هـ = د

(١٤) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول $\overline{أب}$ يساوي ٨ سم.



$\overline{جـك} \perp \overline{جـم}$ وينصفه

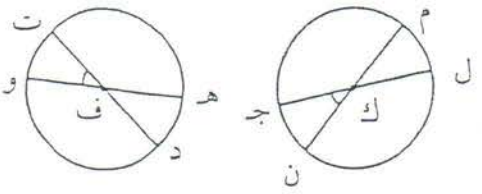
جـم = $\sqrt{6^2 - 4^2} = 4{,}47$

∴ جـ د = $2 \times 4{,}47 = 8{,}94$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

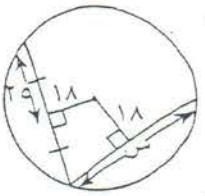
(١) ماذا تستنتج من تطابق الدائرتين وتطابق الزاويتين كما في الشكل المقابل؟

ق(ح ن) = ق(ل م) = ق(هـ د) = ق(ك و)



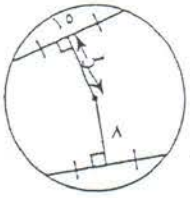
(٢) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)



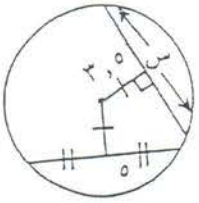
البعد = البعد
∴ الوتر = الوتر
∴ س = ٥٠

(ب)



الوتر = الوتر
∴ البعد = البعد
∴ س = ٨

(جـ)

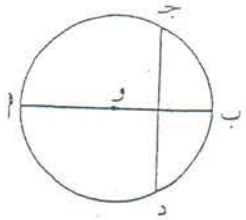


س = ١٠

(٣) مستخدمًا الشكل المقابل، املأ الفراغ بما هو مناسب.

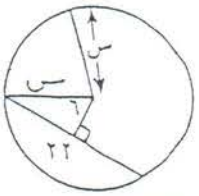
معطى: $\overline{أب}$ منصف عمودي لـ $\overline{جـ د}$.

∴ يمر $\overline{أب}$ بـ مركز الدائرة ه



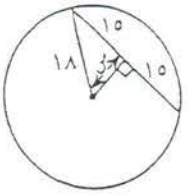
(٤) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:

(أ)



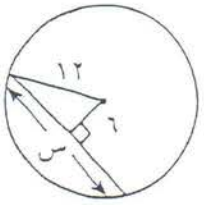
س = $\sqrt{١١^٢ + ٦^٢}$ = $\sqrt{١٥٢٫٥}$

(ب)



س = $\sqrt{١٨^٢ - ١٥^٢}$ = $\sqrt{٩٩٫٩٤}$

(جـ)



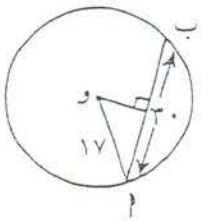
س = $\sqrt{١٢^٢ - ٦^٢}$ × ٢

= ٢٠٫٧٨

(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

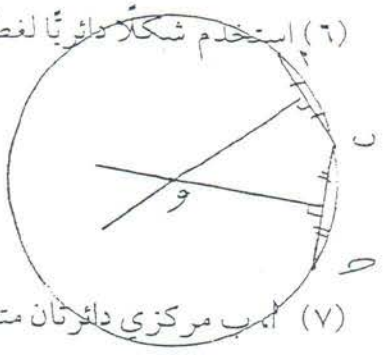
∵ ق(أ و ك) = ٢ × حتا$^{-١}$ $\frac{١٥}{١٧}$ = ١٢٣٫٨٥°

∴ ق($\overset{\frown}{أك}$) = ١٢٣٫٨٥°

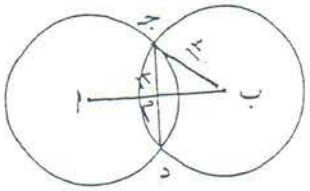


(٦) استخدم شكلاً هندسيًا لغطاء عبوة مشروب غازي لرسم دائرة، حدّد مركز هذه الدائرة.

نأخذ ٣ نقاط م ، ن ، هـ على سور الغطاء (الدائرة)
نرسم محوراً لكل من م ن ، ن هـ يتقاطعا في و
و هي مركز الدائرة



(٧) أ ب مركزي دائرتان متطابقتان. ج د وتر مشترك لكلتا الدائرتين.
إذا كان طول نصف القطر يساوي ١٣سم، ج د = ٢٤سم. فما طول أ ب؟

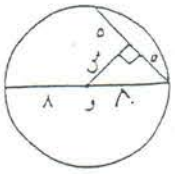


م ك ⊥ ص د

ب م = √(١٣² - ١٢²) = ٥ سم

∴ أ ب = ٢ × ٥ = ١٠ سم

(٨) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س إلى أقرب جزء من عشرة.

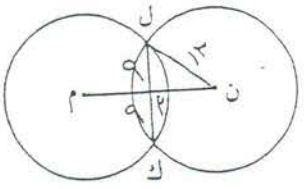


س = √(٨٫٥² - ٨²) = ٢٫٦ سم

(٩) طول نصف قطر دائرة يساوي ٨ , ١٠ سم، وطول الوتر ١٢سم. ما البعد بين مركز الدائرة والوتر؟

البعد = √((١٠٫٨)² - ٦²) = √٩٨٫٨ سم

(١٠) في الشكل أدناه م، ن مركزي دائرتان متطابقتان. طول نصف قطر كل دائرة يساوي ١٣سم، ل ك وتر مشترك للدائرتين، حيث ل ك = ١٨ سم. أوجد طول م ن
علمًا بأن القطعة ل ك ∩ م ن = {و}.



م ن ⊥ ل ك

م و = √(١٣² - ٩²) = √٣٨٫٩ سم

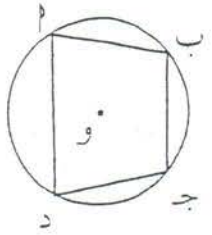
م ن = ٢ × ٣٨٫٩ = ٧٦٫٨ = √١٨ سم

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
Central Angles and Inscribed Angles

المجموعة ١: تمارين أساسية

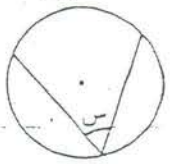
(١) في الشكل المقابل، سمِّ الزوايا المحيطية.



(أ ب ج)، (ب ج د)، (ج د أ)، (د أ ب)

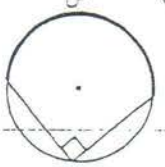
(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

(أ)



س = ½ × ١١٦ = ٥٨°

(ب)



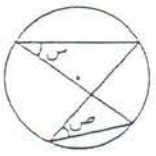
س = ٢ × ٩٠ = ١٨٠°

(جـ)

س = ٣٦٠° − (٦٠° + ٨٢°) = ٢١٨°

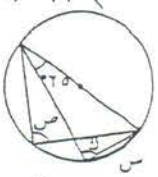
ص = ½ × ٢١٨ = ١٠٩°

(د)



س = ص = ½ × ٧٢ = ٣٦°

(هـ)

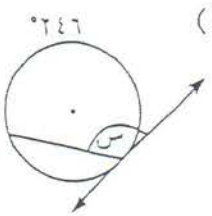


ك = ص = ٩٠°

س = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

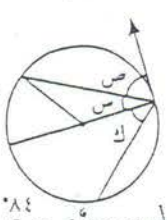
(٣) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن المستقيم في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.

(أ)



س = ½ × ٢٤٦ = ١٢٣°

(ب)

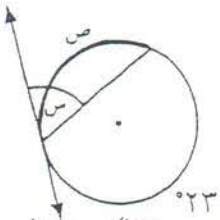


ك = ½ × ٨٤ = ٤٢°

س = ½ × ٥٢° = ٢٦°

ص = ٩٠° − ٢٦° = ٦٤°

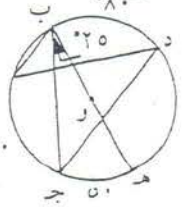
(جـ)



ص = ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

س = ½ × ١٣٠° = ٦٥°

(٤) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) ق(أ̂) = ٤٠°

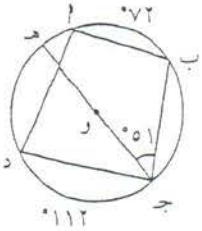
(ب) ق(جـ هـ) = ٥٠°

(جـ) ق(جـ̂) = ٤٠°

(د) ق(د̂) = ٤٠°

(هـ) ق(أ ب هـ) = ½ × ١٣٠° = ٦٥°

(٥) في الشكل المقابل، أوجد قياس: القوس الأصغر ب جـ ، ق(ب)، ق(ب جـ د).



ق(ب هـ) = ٥١ × ٢ = ١٠٢°

ق(ب جـ) = ١٨٠ - ١٠٢ = ٧٨°

ق(أ د) = ٣٦٠ - (٧٢° + ٧٨° + ١١٢°) = ٩٨°

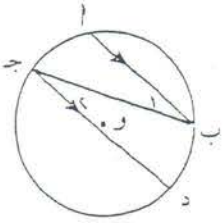
ق(ب) = ½ (٩٨ + ٧٢)

= ٨٥

ق(ب د) = ½ (٩٨ + ١١٢)

= ١٠٥°

(٦) ارسم الوتر ب جـ. اشرح لماذا أجـ ≡ ب د.



ب ح // ء د ∴ ق(أ) = ق(ء) بالتبادل

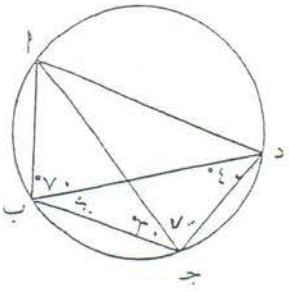
∴ ق(أجـ) = ق(ب د)

∴ أجـ ≅ ب د

(٧) ما نوع شبه المنحرف المحاط بدائرة؟ اشرح.

شبه منحرف متساوي الساقين لأنه كوتري الدائرة (القاعدتين) يصنعان مع القاطع زاويتين متساويتين

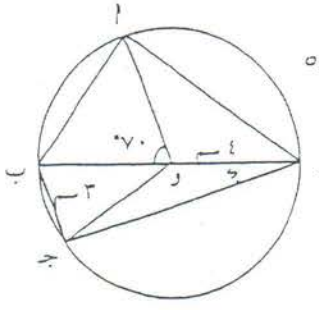
(٨) أوجد ق(جـ ب د).



ق(ء ب أ) = ق(ء ب أ) = ٧٠°

∴ ق(جـ ب د) = ١٨٠ - (٤٠° + ١٠٠°) = ٤٠°

(٩) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة. أوجد:

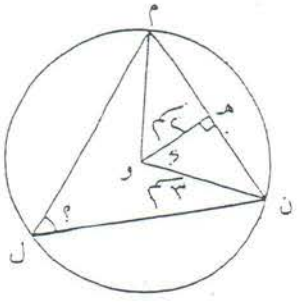


(أ) ق(أ د ب) = ½ × ٧٠ = ٣٥°

(ب) قياس كلّ من أب ، أد . ق(ب جـ) = ٧٠° ، ق(أ ء) = ١١٠°

* (جـ) ق(ب د جـ) = حا⁻¹ ٣/٨ ≈ ٢٢°

* (١٠) مستخدمًا معطيات الشكل، حيث و هي مركز الدائرة،



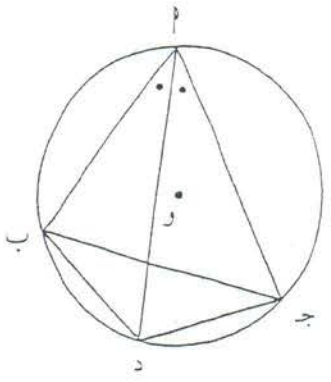
وهـ = ٢ سم، ن و = ٣ سم. أوجد:

(أ) ق(هـ و ن). = حتا⁻¹ ٢/٣ ≈ ٤٨°

(ب) ق(ل) = ½ ق(م و ن) ≈ ٤٨°

(١١) في الشكل المقابل، $\overleftarrow{أد}$ منصف الزاوية $أ$.

(أ) أثبت أن المثلث ب جـ د متطابق الضلعين.



$\overleftarrow{أد}$ ينصف $أ$ ∴

$ق(\angle ب أ د) = ق(\angle جـ أ د)$ ∴

$ق(\overset{\frown}{ب د}) = ق(\overset{\frown}{جـ د})$ ∴

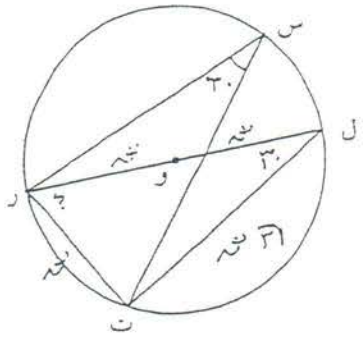
$ب د = جـ د$ ∴

$\triangle ب جـ د$ متطابق الضلعين ∴

(ب) ماذا يمكننا أن نقول عن $\triangle ب جـ د$ إذا كان $\triangle أ ب جـ$ قائم الزاوية في ؟؟

$\triangle ب جـ د$ قائم الزاوية في د

(١٢) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:



(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ قائم الزاوية في ت

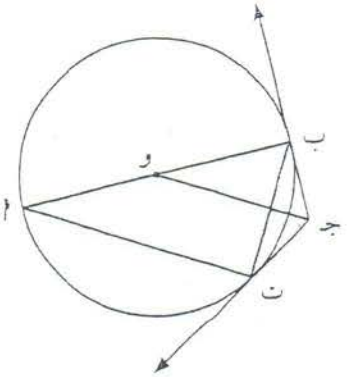
(ب) أوجد $ق(\angle ل ر ت)$. $ق(\angle ل س ت) = ٣٠°$ ∴ $ق(\angle ل ر ت) = ٦٠°$

(جـ) أوجد محيط $\triangle ر ل ت$ بدلالة π.

محيط $\triangle ر ل ت = ٢ ق + \pi + ق = ٣٦ ق = (٣٦ + ٣) ق$

(١٣) $\overline{أب}$ قطر في دائرة مركزها و. $\overleftarrow{جـ ب}$، $\overleftarrow{جـ ت}$ مماسان للدائرة يتقاطعان في جـ.

أثبت أن $\overline{أت} // \overline{وجـ}$. (إرشاد: صل $\overline{وت}$ أو $\overline{ب ت}$)



$\overleftarrow{جـ ت}$، $\overleftarrow{جـ ب}$ مماسان للدائرة و ∴ $\overline{جـ و} \perp \overline{ب ت}$ ← ①

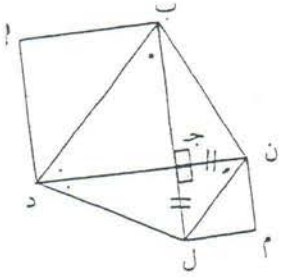
، $\overline{أب}$ قطر ∴ $ق(\angle ب ت أ) = ٩٠°$ ∴ $\overline{أت} \perp \overline{ب ت}$ ← ②

من ①، ② ∴ $\overline{أت} // \overline{جـ و}$

(١٤) التفكير المنطقي: أ ب جـ د، م ن جـ ل مربعان حيث جـ ∈ $\overline{ن د}$.

هل ب د ل ن هو رباعي دائري؟

فسّر إجابتك.



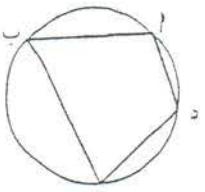
$ق(\angle ل د ن) + ق(\angle ل ب ن) = ٩٠°$

وكلاهما وتران على القطع ل د

∴ الشكل ب د ل ن رباعي دائري

المجموعة ب تمارين تعزيزية

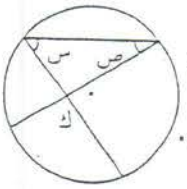
(١) في الشكل المقابل، سمِّ زوجًا من الزوايا المتكاملة.



$\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ متكاملتان ، $\hat{ب}$ ، $\hat{د}$ متكاملتان

(٢) أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

(أ)



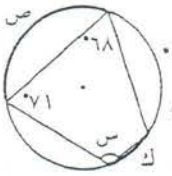
$س = \frac{١٠٨}{٢} = ٥٤°$

$ص = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠°$

$ل = ١٨٠ - (٥٤ + ٣٠)$

$= ٩٦°$

(ب)

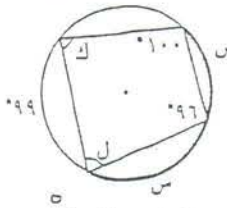


$س = ١٨٠ - ٦٨ = ١١٢°$

$ص = ٣٦٠ - (١٠٤ + ٦٨ × ٢) = ١٢٠°$

$ل = ٧١ × ٢ - ١٠٤ = ٣٨°$

(جـ)



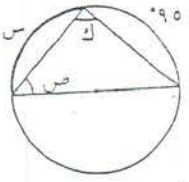
$ل = ٨٠°$

$، لـ = ٨٤°$

$س = ٢٠٠ - ٩٩ = ١٠١°$

$ص = ٢ × ٨٤ - ١٠١ = ٦٧°$

(د)

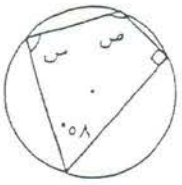


$لـ = ٩٠°$

$ص = ٥ و ٤٧°$

$س = ١٨٠ - ٩٥ = ٨٥°$

(هـ)

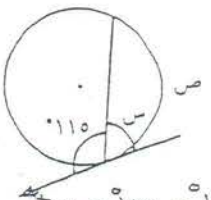


$س = ٩٠°$

$، ص = ١٨٠ - ٥٨ = ١٢٢°$

(٣) أوجد قيمة المجهول في كلّ من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماسًا للدائرة.

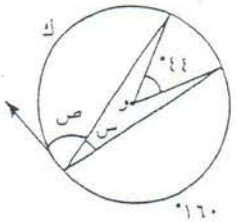
(أ)



$س = ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°$

$ص = ٢ × ٦٥° = ١٣٠°$

(ب)

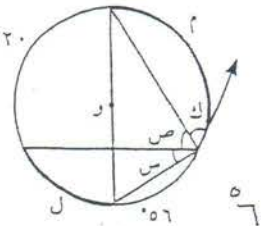


$س = \frac{١}{٢} × ٤٤° = ٢٢°$

$ص = ٩٠° - ٢٢° = ٧٨°$

$لـ = ٢ × ٧٨° = ١٥٦°$

(جـ)



$ص = ٦٠°$

$س = ٣٠°$

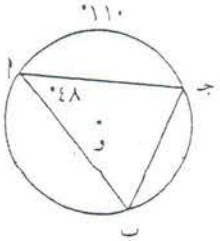
$ل = ٢ × ٣٠° = ٦٠°$

$م = ٣٦٠ - (١٢٠ + ٥٦ + ٦٠)$

$= ١٢٤°$

$، لـ = \frac{١}{٢} × ١٢٤ = ٦٢°$

(٤) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الشكل المقابل.



(أ) $ن(\overset{\frown}{ب جـ}) = ٩٦°$

(ب) $ن(\hat{ب}) = \frac{١}{٢} × ١١٠° = ٥٥°$

(جـ) $ن(\hat{جـ})$

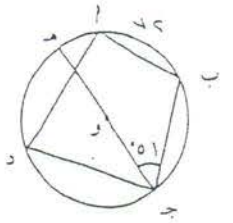
$= ١٨٠ - (٤٨ + ٥٥)$

$= ٧٧°$

(د) $ن(\overset{\frown}{أ ب}) = ٢ × ٧٧°$

$= ١٥٤°$

(٥) في الشكل المقابل، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ٧٢°، ق (ب جـ هـ) = ٥١° أوجد قياس القوس هـ أ.

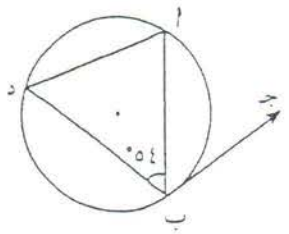


ق ($\overset{\frown}{هـأ}$) = ١٨٢° - ٧٢° = ١٠٨°

(٦) هل كل متوازي أضلاع يكون رباعي دائري؟ فسّر إجابتك..

لا ، لأنه في متوازي الأضلاع كل زاويتان متقابلتان متساويتان ولكي يكون رباعي دائري والاً عندما تكون كل زاوية منه = ٩٠°

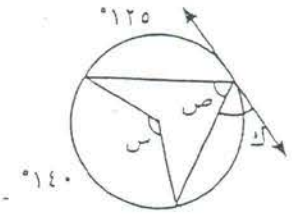
(٧) في الرسم المقابل، ق (ب د) = ١٤٠° أوجد ق($\overset{\frown}{أجـ}$).



ق (ن $\hat{ك}$ د) = ٧٠° ∴ ق($\overset{\frown}{أدب}$) = ١٨٠ - (٥٤ + ٧٠) = ٥٦°

∴ ق($\overset{\frown}{أن}$ جـ) = ٥٦°

(٨) أوجد قيمة كل من الزاويا المجهولة في الشكل المقابل.



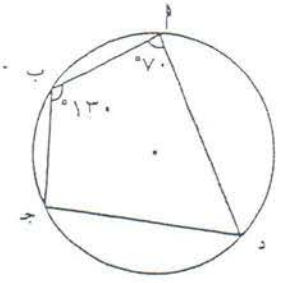
س = ١٤٠°

، ص = ٧٠°

، ك = $\frac{1}{2}$ × ٩٥° = ٤٧٫٥°

(٩) أ ب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة) . ق($\hat{أ}$) = ٧٠° ، ق($\hat{ب}$) = ١٣٠°.

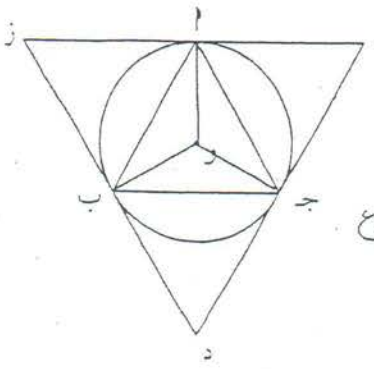
أوجد ق($\hat{جـ}$) ، ق($\hat{د}$).



ق($\hat{ك}$) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

، ق($\hat{ن}$) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

(٣) Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع تحيط به دائرة. أثبت أن المماسات على الدائرة في النقاط أ ، ب، جـ تشكل مثلثًا متطابق الأضلاع.



ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ن}$) = ق($\hat{ك}$) = ٦٠° زوايا المثلث أ ب جـ

∴ ق($\overset{\frown}{أدك}$) = ق($\overset{\frown}{أدن}$) = ق($\overset{\frown}{جـدن}$) = ١٢٠° مع خواص Δ تحيط به الأضلاع

∴ ق($\overline{ك}$) = ق($\overline{ن}$) = ق($\overline{ن}$) = ٦٠°

∴ Δ هـ ز د متطابق الأضلاع

تمرّن ٦-٤

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

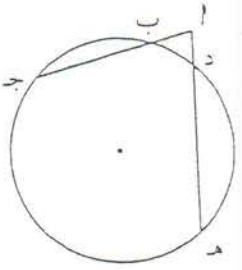
المجموعة أ: تمارين أساسية

(١) في الشكل المقابل:

أ ج = ٢٠، ب ج = ١٥

أ هـ = ٢٥.

أوجد: د هـ.



أ ج × ب ج = هـ ج × د ج

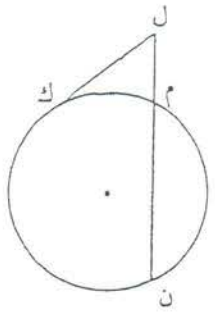
٢٠ × ١٥ = ٢٥ × د ج

د ج = ٢٠ × ١٥ / ٢٥ = ١٢ ∴ د هـ = ١٣

(٢) في الشكل المقابل ل ك مماس الدائرة

ل ك = ٨؛ ل م = ٤.

أوجد: م ن.



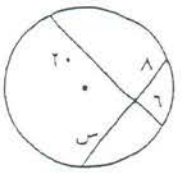
(ل ك)^{٢} = ل م × ل ن

٨^{٢} = ٤ × ل ن

∴ ل ن = ١٦ ∴ م ن = ١٢

في التمارين (٣–٥)، أوجد قيمة كل متغيّر.

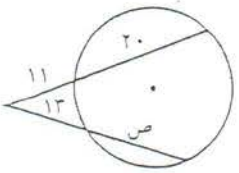
(٣)



س × ٨ = ٦ × ٢٠

س = ٦ × ٢٠ / ٨ = ١٥

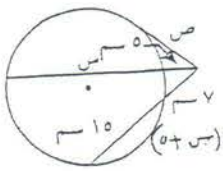
(٤)



١٣ × ١١ = (ص + ١٣) × ٢٣

١٣ + ص = ٩ر٢٧ ص = ١٤ر٩

(٥)



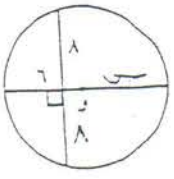
٧ × ٢٢ = ٥ × (س + ٥)

س = ٨ر٥

ص^{٢} = ٧ × ٢٢ ص = ٤ر١٢

في التمرينين (٦–٧)، أوجد طول قطر كل دائرة.

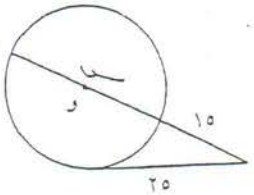
(٦)



٨ × ٨ = ٦ × س

س = ٦ر١٠ ∴ طول القطر = ٦ر١٦

(٧)



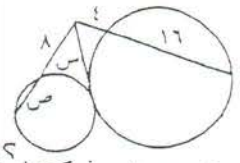
(٢٥)^{٢} = ١٥ (١٥ + س)

١٥ + س = ٦ر٤١ ∴ س = ٦ر٢٦

∴ طول القطر = ٦ر٢٦

في التمرينين (٨ – ٩)، استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س، ص.

(٨)



$س^2 = ٤ \times ٢٠ = ٨٠$

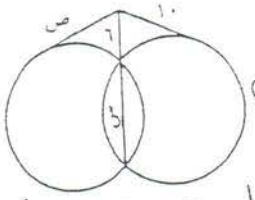
$س = \sqrt{٨٠}$ و ٨

$٨ \times ٨ = (٨ + ص)$

$٨٠ = ٨ \times (٨ + ص)$

$ص = ٢$

(٩)



$(١٠)^2 = ١ \times (٦ + س)$

$٦ + س = \frac{١٠٠}{٦}$

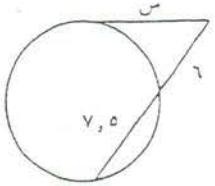
$س = ١٦\frac{٦}{٦}$

$ص^2 = ٦(٦ + س) = ١٠٠$

$ص = ١٠$

(١٠) تحليل الخطأ: لإيجاد قيمة س كتب أحد الطلاب المعادلة التالية:

$٦ \times ٧,٥ = س^2$. فما الخطأ الذي وقع به؟

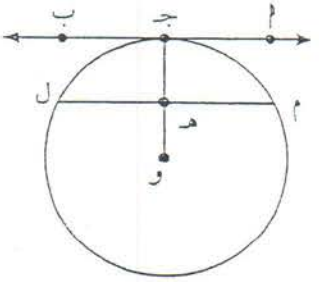


المفروض يكتب $س^2 = ٦ \times ١٣\frac{٥}{٦}$

(١١) $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند جـ

هـ منتصف الوتر $\overline{م ل}$.

أثبت أن: $\overline{م ل} \parallel \overleftrightarrow{أب}$.



∵ هـ منتصف $\overline{م ل}$

∴ $\overline{وهـ} \perp \overline{م ل}$ ∴ $ق(\angle وهـل) = ٩٠°$

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{وجـ}$ نصف قطر

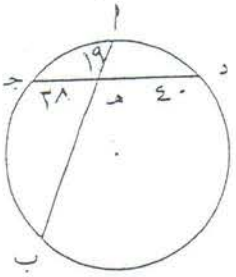
∴ $\overline{وجـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ $ق(\angle وجـب) = ٩٠°$

وهما في وضع تناظر ∴ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overline{م ل}$

(١٢) في الشكل أدناه:

أهـ = ١٩، هـ د = ٤٠، هـ جـ = ٣٨

أوجد هـ ب.

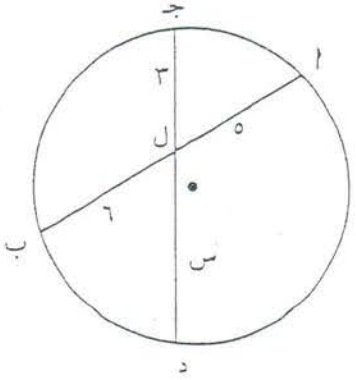


$١٩ \times هـ ب = ٣٨ \times ٤٠$

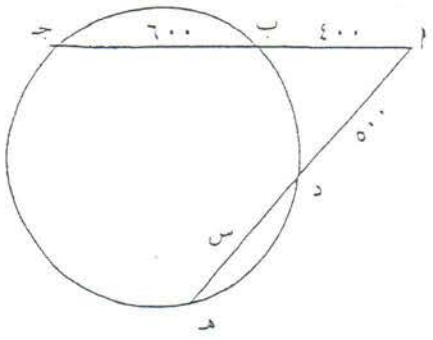
$هـ ب = \frac{٣٨ \times ٤٠}{١٩} = ٨٠$

(١٣) أوجد قيمة س. $س \times ٣ = ٦ \times ٥$

$س = ١٠$



(١٤) أوجد قيمة س.



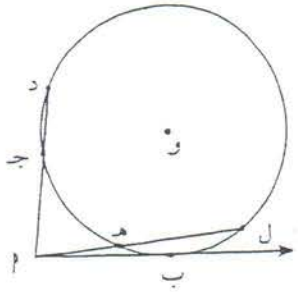
١٠٠٠ × ٤٠٠ = ١٠٠ × (٥٠٠ + س)

٥٠٠ + س = ٨٠٠

س = ٣٠٠

(١٥) في الشكل المقابل: $\overleftarrow{اب}$ مماس للدائرة

اجـ = ١٠، اهـ = ٨، هـ ل = ١٢.



(أ) أوجد جـ د.

١٠ × ٨ = ٢ × ٥ د ب

٢ ٥ د ب = ١٦٠

٥ د ب = ٨٠

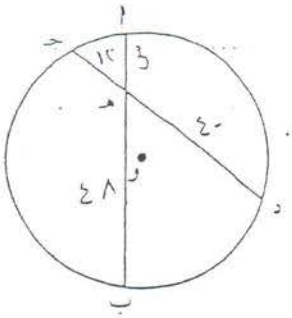
د ب = ١٦

(ب) أوجد اب.

(ا ب)^{٢} = ٨ × ٢٠ = ١٦٠

ا ب = ١٢٫٦٤

(١٦) في الشكل المقابل أوجد قيمة س إذا كان: جـ هـ = ١٢، هـ د = ٤٠، هـ ب = ٤٨.



س × ٤٨ = ١٢ × ٤٠

س = ١٠

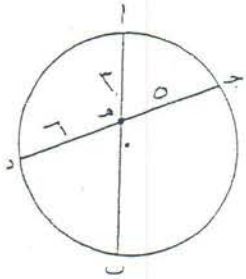
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل أدناه:

هـ جـ = ٥، هـ ا = ٣،

هـ د = ٦.

أوجد هـ ب.



٣ × هـ ب = ٥ × ٦

هـ ب = ١٠

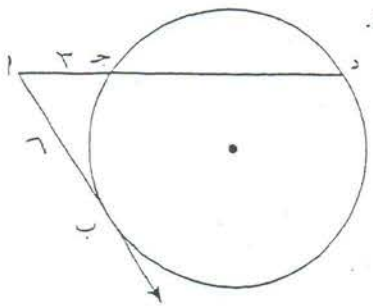
(٢) في الشكل أدناه:

$\overleftarrow{اب}$ مماس للدائرة

اب = ٦

اجـ = ٣

أوجد اد، جـ د.



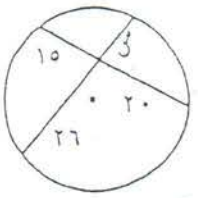
٦^{٢} = ٣ × ا د

ا د = ١٢

جـ د = ٩

في التمارين (٣—٥)، أوجد قيمة كل من س، ص.

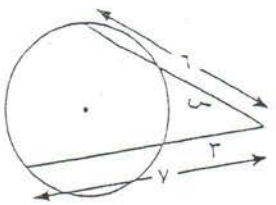
(٣)



س × ٢٦ = ٢٠ × ١٥

س = ١١٫٥٣

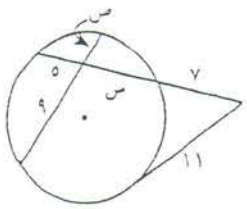
(٤)



س × ٦ = ٣ × ٧

س = ٣٫٥

(٥)



ص × ٩ = س × ٥

ص = $\frac{٥ \times ٢٨}{٩}$

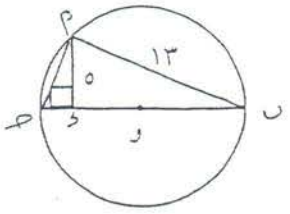
ص = ٢٫٩٣

$١١^{٢}$ = ٧ × (١٢ + س)

١٢ + س = $\frac{١٢١}{٧}$

س = ٥٫٢٨

* (٦) أوجد طول قطر الدائرة، استخدم الشكل المقابل للإجابة.



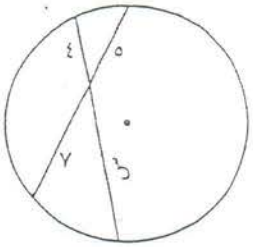
ب ك = $\sqrt{١٣^{٢} - ٥^{٢}}$ = ١٢

، $(م ب)^{٢}$ = ب ك × ب د

$(١٣)^{٢}$ = ١٢ × ب د

ب د = ١٤٫٠٨ = طول القطر

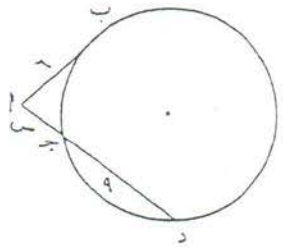
(٧) أوجد قيمة س.



س × ٤ = ٧ × ٥

س = $\frac{٧ \times ٥}{٤}$ = ٨٫٧٥

(٨) أوجد قيمة س.



$٦^{٢}$ = س × (س + ٩)

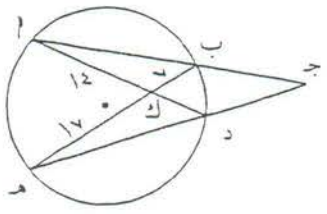
∴ $س^{٢}$ + ٩ س − ٣٦ = ٠

(س + ١٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٣

(٩) في الشكل المقابل، إذا كان أ ك = ١٤، هـ ك = ١٧، ب ك = ٧.

فأوجد د ك.



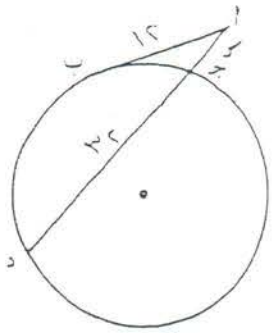
١٤ × د ك = ٧ × ١٧

د ك = $\frac{٧ \times ١٧}{١٤}$ = ٨٫٥

٢٨٦

(١٠) في الشكل المقابل،

$\overline{أب}$ مماس للدائرة. أب = ١٢ ، جـ د = ٣٢. أوجد أجـ



$(١٢)^{٢} = س (س + ٣٢)$ ∴ $س = ٤$

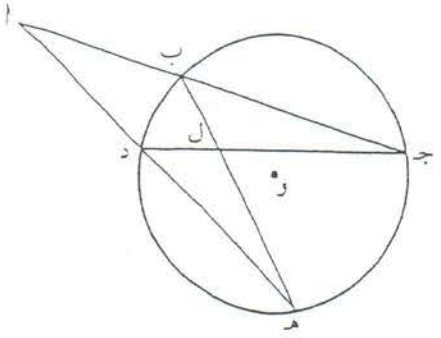
$س^{٢} + ٣٢ س - ١٤٤ = ٠$ ∴ $أ هـ = ٤$

$(س + ٣٦)(س - ٤) = ٠$

(١١) في الشكل المقابل، $\overline{ب هـ}$، $\overline{دجـ}$ يتقاطعان في ل.

جـ ب ، هـ د يتقاطعان في أ.

أثبت أن:



(أ) ل جـ = ل هـ، علمًا إن: ل د = ل ب.

ل جـ × ل د = ل هـ × ل ب لأن ل د = ل ب

∴ ل جـ = ل هـ

(ب) ب جـ = د هـ علمًا إن: أب = أد

أ ب × أ جـ = أ هـ × أ د لأن أ ب = أ د

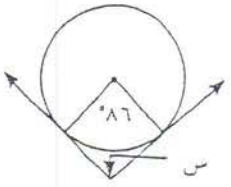
أ ب + ب جـ = أ د + د هـ لأن أ ب = أ د

∴ ب جـ = د هـ

اختبار الوحدة السادسة

في التمرينين (١ - ٢)، لنفرض أن الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

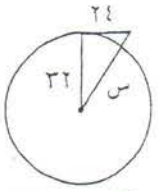
(١)



س = ٣٦٠ − (٩٠° + ٩٠° + ٨٦°)

س = ٩٤°

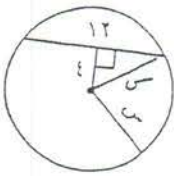
(٢)



س = √(٢٤٢ + ٣٢٢) = ٤٠

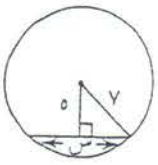
في التمرينين (٣ - ٤)، أوجد قيمة س.

(٣)



س = √(٦٠ − ٤٢) = ٦√٢

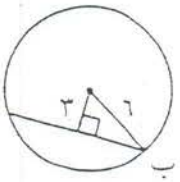
(٤)



س = √(٧٢ − ٥٢) = ٨٫٩

في التمرينين (٥ - ٦)، أوجد قياس القوس أب.

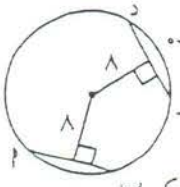
(٥)



ق(أب) = ٢ × جتا⁻¹ ٣/٦ = ٢ × ٦٠

= ١٢٠°

(٦)



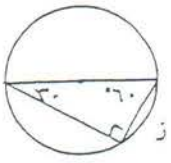
∵ البعد = البعد

∵ الوتر = الوتر

∴ ق(أب) = ق(جـ ب)

∴ ق(أب) = ٦٥°

(٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ز. ز = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

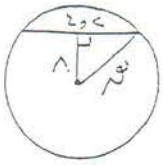


(٨) الكتابة: المعيّن المحاط بدائرة خارجة هو مربع. ____

(أ) صح

(ب) خطأ

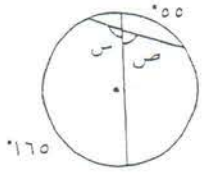
(٩) وتر في دائرة طوله ٢ , ٤ سم ويبعد ٨ سم عن مركز الدائرة. فما طول نصف قطر الدائرة؟



نق = $\sqrt{٨^{٢} + (٢٫١)^{٢}}$ = $\sqrt{٦٧٫٤}$ = ٨٫٢ سم

في التمارين (١٠ – ١٥)، الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة. أوجد قيمتي س، ص في كل مما يلي:

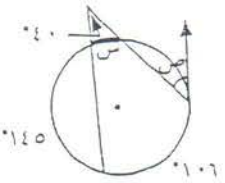
(١٠)



س = $\frac{١}{٢}$ (١٦٥° + ٥٥°) = ١١٠°

ص = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

(١١)



١٠٦ − س = ٢٨٠٤

س = ١٠٦ − ٨٠ = ٢٦°

ص = $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠ − (١٠٦ + ١٤٥ + ١٦)]

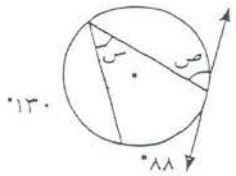
= ٤١٫٥°

(١٢)

٦ × (٦ + س) = ١٠ × ٥ ∴ س = ٦٫٥

٦ + س = ١٢٫٥

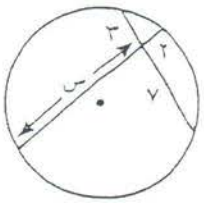
(١٣)



س = $\frac{٨٨°}{٢}$ = ٤٤°

ص = $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠° − ٨٨° − ١٣٠°] = ٧١°

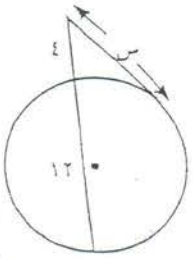
(١٤)



س × ٢ = ٧ × ٣

س = $\frac{٧ \times ٣}{٢}$ = ١٠٫٥°

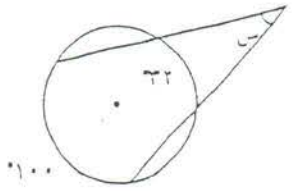
(١٥)



س^{٢} = ٤ × ١٦

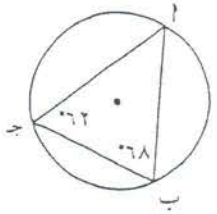
س = ٨

(١٦) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



س = $\frac{1}{2}$ [١٠٠° − ٣٢°] = ٣٤°

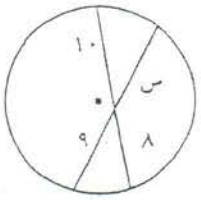
(١٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة $\overset{\frown}{ب ج}$.



ق(أ) = ١٨٠° − (٦٨° + ٦٢°) = ٥٠°

ق($\overset{\frown}{ب ج}$) = ٢ × ٥٠° = ١٠٠°

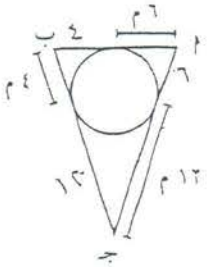
(١٨) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



س × ٩ = ٨ × ١٠

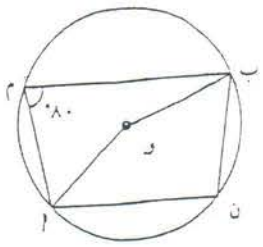
س = $\frac{٨ \times ١٠}{٩}$ = ٨٫٨

(١٩) أوجد محيط المثلث أ ب جـ.



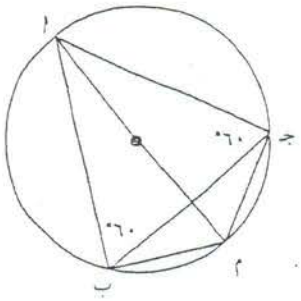
محيط Δ أ ب جـ = ٦ + ٦ + ١٢ + ١٢ + ٤ + ٤ = ٤٤ م

(٢٠) أوجد ق(ن).



ق(ن) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

(٢١) في الشكل المقابل، Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع. أوجد :



ق(أ م̂ ب) = ق(م ح̂ ب) = ٦٠°

ق(ب م̂ جـ) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

ق(م ج̂ ب) = ق(م ب̂ ح) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

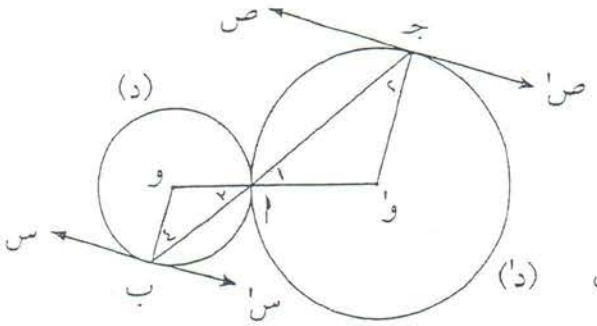
ق(أ م̂ جـ) = ق(م ب̂ ح) = ٦٠°

تمارين إثرائية

(١) (د) ، (د') دائرتان لهما أ نقطة مماس خارجية.

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ قاطع يمر بالنقطة أ ويقطع الدائرة (د) بالنقطة ب ويقطع الدائرة (د') بالنقطة جـ.

أثبت أن المماس من النقطة ب للدائرة (د) موازٍ للمماس من النقطة جـ للدائرة (د').



$\because$ ق(١) = ق(٢) ، ق(٣) = ق(٤) ، ق(١) = ق(٢) بالتقابل بالرأس

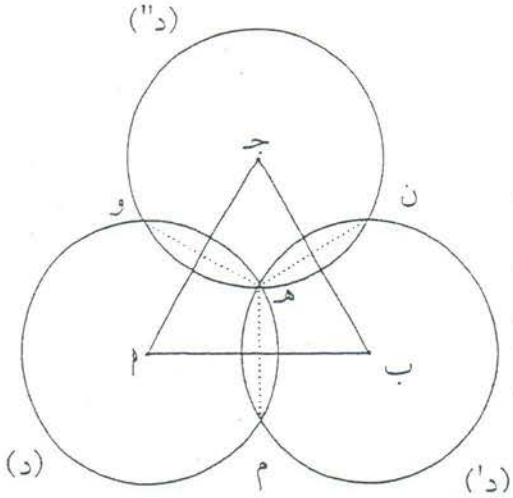
$\therefore$ ق(ص أ ب) = ق(س أ ب)

وهما في وضع تبادل

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ص أ ص'} \parallel \overleftrightarrow{س أ س'}$

(٢) (د) ، (د') ، (د") ثلاث دوائر متطابقة ومراكزها على الترتيب أ ، ب ، جـ. تتقاطع الدوائر الثلاث في النقطة المشتركة هـ.

ماذا تمثل النقطة هـ بالنسبة إلى المثلث أ ب جـ؟ اشرح.



$\overline{هـ ن} \perp \overline{د جـ}$ وينصفه

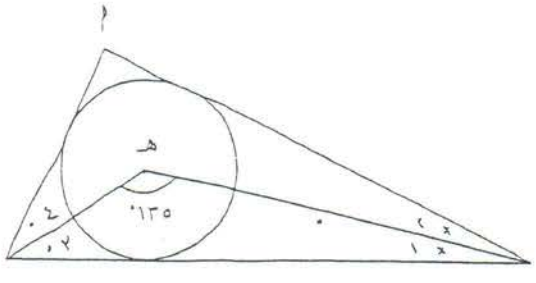
$\overline{هـ و} \perp \overline{أ جـ}$ وينصفه

$\overline{هـ م} \perp \overline{أ ب}$ وينصفه

$\therefore$ تعمد هـ هـ تقطر تقاطع خاور الأضلاع للمثلث أ ب جـ

$\therefore$ هـ هـ مركز الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

(٤) أ ب جـ مثلث. هـ مركز الدائرة المحاطة بالمثلث أ ب جـ (نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث أ ب جـ).



ق(ب هـ جـ) = ١٣٥°.

أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في أ.

ق(أ) + ق(٣) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

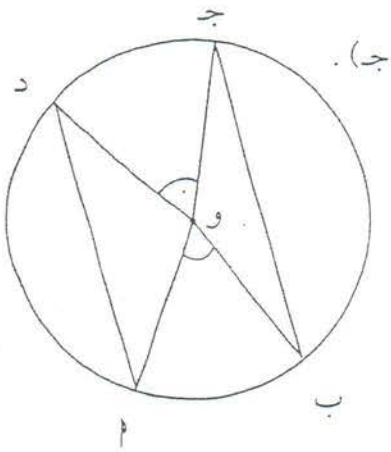
∴ ٢ [ق(أ) + ق(٣)] = ٩٠°

∴ ق(أ ب) + ق(ب جـ) = ٩٠°

∴ ق(أ) = ٩٠°

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

(٥) أ، ب، جـ، د نقاط على الدائرة مركزها و، حيث ق(أ و ب) = ق(د و جـ).



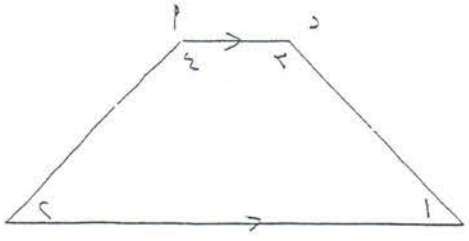
أثبت أن: $\overline{أ د} \parallel \overline{ب جـ}$.

∵ ق(أ و ب) = ق(د و جـ)

∴ ق(أ ب) = ق(د جـ)

∴ $\overline{أ د} \parallel \overline{ب جـ}$

(٦) في الشكل المقابل أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين.



أثبت أنه رباعي دائري:

ق(١) + ق(٣) = ١٨٠° بالتبادل والتوازي

ق(١) = ق(٤) ∵ شبه منحرف متطابق الضلعين

∴ ق(٤) + ق(٣) = ١٨٠°

وبالمثل ق(١) + ق(٤) = ١٨٠° ∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data in Matrices

المجموعة ١ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) [٢ ٧ ٥] ٢ × ١

(٢) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٧- \end{bmatrix}$ ٣ × ٣

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٦- \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، [٧ ١٦ ٦- ٧ ٤٦] لا لأن الرتبة مختلفة

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٣٢}$.

(٤) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣- & ٧- \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ٣ × ٣ $أ_{٣٢} = -٧$

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقّق ما يلي: [٢س س – ص] = [أ ب]؟

(أ) س = أ٢، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب

(ب) س = $\frac{١}{٢}$أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

س = $\frac{١}{٢}$أ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب

(د) س = أ٢، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

في التمرينين (٦–٧)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^٢ & ٤ \\ ٢- & ص^٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ ٢- & ٥ص \end{bmatrix}$

$س^٢ = ٩$ ، $س = \pm ٣$

$ص^٢ - ٥ص = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $ص = ٥$

(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤س - ٦ & ١٠ص + ٥س \\ ٤س & ١٥ص + ٧,٥س \end{bmatrix}$

$٨ = ٤س$

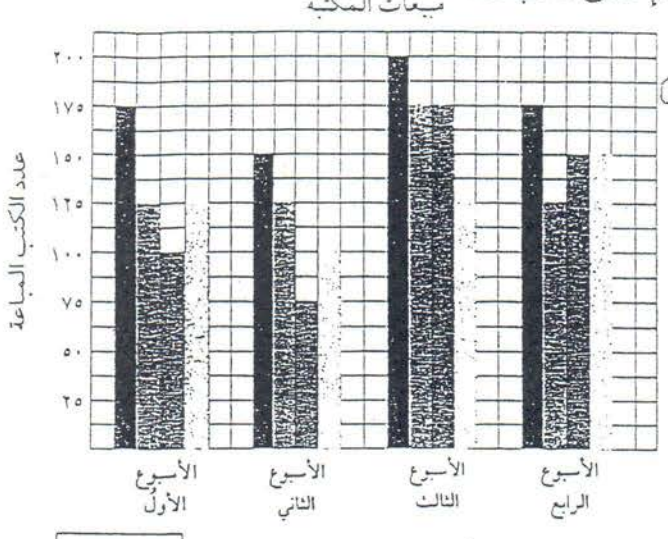
$س = ٢$

$١٠ص + ٥س = ٤$

$١٠ص + ١٠ = ٤$

$ص = -٦$

(٨) يوضّح التمثيل البياني المبيعات في شهر أغسطس لإحدى المكتبات.



(أ) سجّل البيانات في جدول.

	فقه	تاريخ	علوم	رياضيات
الأسبوع الأول	١٧٥	١٢٥	١٠٠	١٢٥
الثاني	١٥٠	١٢٥	٧٥	١٠٠
الثالث	٢٠٠	١٧٥	١٧٥	١٢٥
الرابع	١٧٥	١٢٥	١٥٠	١٥٠

(ب) إعرض البيانات في مصفوفة. ماذا تمثّل الأعمدة؟ والصفوف؟

$$\begin{bmatrix} ١٧٥ & ١٠٠ & ١٢٥ & ١٢٥ \\ ١٥٠ & ٧٥ & ١٢٥ & ١٠٠ \\ ٢٠٠ & ١٧٥ & ١٧٥ & ١٢٥ \\ ١٧٥ & ١٥٠ & ١٢٥ & ١٥٠ \end{bmatrix}$$

---

(٩) تحليل الخطأ: حدّد أحد الطلاب أن العنصر $أ_{٣٢}$، في المصفوفة: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢,٥ & ٤,٥ \\ ١,٥ & ٥ & -٣ \\ ٤ & ٤,٥ & ١,٥ \end{bmatrix}$ هو -٣.
ما خطأ الطالب؟

$أ_{٣٢} = ٤,٥$

---

(١٠) السؤال المفتوح: أوجد بعض البيانات التي يمكن أن تعرضها في صورة مصفوفة. ثم اكتب مصفوفة لها، وميّز الصفوف والأعمدة.

	فهد	أحمد	طلال
الرياضيات	٦٥	٤٢	٧٠
الانجليزي	٥٠	٣٢	٥١

درجات فهد وأحمد وطلال في الرياضيات والانجليزي

في التمارين (١١–١٤)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتان.

(١١) $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ص + ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ص + ١٩ \end{bmatrix}$

$٢س - ٥ = ١٢ \Leftarrow ٢س = ١٧ \Leftarrow س = ٨,٥$

$٢ص + ١٠ = ٤ص + ٩ \Leftarrow -٢ص = -١ \Leftarrow ص = ٠,٥$

(١٢) $\begin{bmatrix} ٢س + ٤ & ص - ٥ \\ ل + ٦ & ٢ك - ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ص - ٢ \\ ٤ & ٤ك + ١٥ \end{bmatrix}$

$س + ٤ = ٤ \Leftarrow س = ٠$

$ل + ٦ = ٤ \Leftarrow ل = -٢$

$ص - ٥ = ٢ص - ٢ \Leftarrow -ص = ٣ \Leftarrow ص = -٣$

$٤ك + ١٥ = ٢ك - ٥ \Leftarrow ٢ك = -٢٠ \Leftarrow ك = -١٠$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٤ص+٢ & -٣ & ٤ل \\ -٤س & ٢ & ٣ \\ ٢ن-١ & -١٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٢ك-١ & ٠ \\ -٨ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٣م-٢ & ١ \end{bmatrix}$

$٤ص+٢=١١$ ، $٤ص=٩$ ، $ص=\frac{٩}{٤}$

$-٤س=-٨$ ، $س=٢$

$٢ل-١=-٣$ ، $٢ل=-٢$ ، $ل=-١$

$٣م-٢=-١٤$ ، $٣م=-١٢$ ، $م=-٤$

$٢ن-١=٠$ ، $٢ن=١$ ، $ن=\frac{١}{٢}$

(١٤) $\begin{bmatrix} ٤س & ٢-ص & ٥ \\ -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١٠ & ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س+٥ & ٤ص & ل \\ -٣ & م & ك-ل \\ ٠ & -٤س & ١٥ \end{bmatrix}$

$-٤س=-١٠$ ← $س=٥$ و ٢

$ل=ص$

$ك-ل=٢$ ، $ك-٥=٢$ ، $ك=٧$

$٤ص=٢-ص$ ← $٥ص=٢$ ← $ص=٠,٤$

(١٥) صنعت شركة لإنتاج الحاسوب جهازًا يحمل مخططًا لأربع دول تقع في قارة أفريقيا وهي:
جمهورية مصر العربية ومساحتها مليون كيلومتر مربّع، ليبيا: ١ ٨٠٠ ٠٠٠ كيلومتر مربّع،
الجزائر: ٢ ٤٠٠ ٠٠٠ كيلومتر مربّع، السودان: ٢ ٥٠٠ ٠٠٠ كيلومتر مربّع.
مثّل هذه البيانات في مصفوفة مميّزًا الصفوف والأعمدة واكتب رتبة المصفوفة.

	مصر	ليبيا	الجزائر	السودان
الساحة	١٠٠٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠٠	٢٤٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠٠

رتبة المصفوفة ١ × ٤

(١٦) الكتابة: حدّد معلومات تحب أن تضيفها لعمل مصفوفة تحتوي على بيانات عددية ذات معنى.

يمكن أن نضيف عدد السكان في كل دولة من الدول الأربع

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١ – ٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$ ٢ × ٣

(٢) $\begin{bmatrix} ١ \\ -٩ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ٣ × ١

في التمرينين (٣ – ٤)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢(-١) & ٢(١,٥) \\ ٢(٢,٥) & ٢(٠) \end{bmatrix}$

قارن كل

$٢(-١)=-٢$ ، $٢(١,٥)=٣$

$٢(٢,٥)=٥$ ، $٢(٠)=٠$

(٤) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢- & ٤ \\ ٤- & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٤- & ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ لا ، لأن الرتبة مختلفة

في التمرينين (٥ — ٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كلّ مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضّح.

(٥) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{٢٣}$

٣ × ٤ ، $أ_{٢٣} = ٠$

(٦) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٣- \\ ٢ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب_{٢١}$

٢ × ٣ ، $ب_{٢١} = ١$

في التمارين (٧ — ٩)، استخدم الجدول أدناه.

عدد التليفزيونات المستخدمة في إحدى الدول بالمليون

النوع/ السنة	١٩٨٠	١٩٨٢	١٩٨٤	١٩٨٧	١٩٩٠	١٩٩٣
ملون	٨٢	٨٥	٨٨	٩٣	٩٦	٩٨
أبيض وأسود	٥١	٤٧	٤٣	٣٦	٣١	٢٠

(٧) وضّح البيانات في صورة مصفوفة حيث الصفوف تمثل نوع التليفزيون، والأعمدة تمثّل السنوات. وأوجد $أ_{٢٢}$. ماذا يمثّل؟

$\begin{bmatrix} ٨٢ & ٨٥ & ٨٨ & ٩٣ & ٩٦ & ٩٨ \\ ٥١ & ٤٧ & ٤٣ & ٣٦ & ٣١ & ٢٠ \end{bmatrix}$

$أ_{٢٢} = ٤٣$ ، يمثل عدد التليفزيونات الأبيض والأسود عام ١٩٨٤

(٨) اعرض البيانات في مصفوفة بصفوف تمثّل السنوات، وأعمدة تمثّل نوع التليفزيون.

أوجد $أ_{١٤}$ ، ووضّح ماذا يمثّل.

$\begin{bmatrix} ٨٢ & ٥١ \\ ٨٥ & ٤٧ \\ ٨٨ & ٤٣ \\ ٩٣ & ٣٦ \\ ٩٦ & ٣١ \\ ٩٨ & ٢٠ \end{bmatrix}$

$أ_{١٤} = ٩٣$

يمثل عدد التليفزيونات الملونة في عام ١٩٨٧

(٩) اذكر أبعاد المصفوفات في التمرينين رقمي ٧، ٨.

٢ × ٦ ، ٦ × ٢

(١٠) الجغرافيا: الجدول يوضّح المسافات بين بعض المدن بالكيلومتر.

(أ) أكمل الجدول. كيف يكون ذلك ممكنًا بالنسبة إليك؟

المدينة	الكويت	الرياض	أبوظبي	مسقط
الكويت	-	٥٣٧	١٤٨٤	٢٥٦٨
الرياض	٥٣٧	-	٧٦٨	١٧٢٢
أبوظبي	١٤٨٤	٧٦٨	-	٢٢٥٩
مسقط	٢٥٦٨	١٧٢٢	٢٢٥٩	-

(ب) اكتب مصفوفة مناظرة لهذه البيانات.

$$\begin{bmatrix} - & ٥٣٧ & ١٤٨٤ & ٢٥٦٨ \\ ٥٣٧ & - & ٧٦٨ & ١٧٢٢ \\ ١٤٨٤ & ٧٦٨ & - & ٢٢٥٩ \\ ٢٥٦٨ & ١٧٢٢ & ٢٢٥٩ & - \end{bmatrix}$$

جمع المصفوفات وطرحها
Adding And Subtracting Matrices

المجموعة ١: تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٢- & ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٧- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

في التمارين (٣ – ٦)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٤ \\ ١- & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٥- \\ ١ & ٢ & ١- \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ١- \\ ٠ & ٣ & ١٠- \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٦ & ٩- & ٠ \\ ٨- & ٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٤- & ١ \\ ٣ & ١١ & ١٠ \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ١- \\ ١١- & ١٦ & ١٧ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣- \\ ٧ & ٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢- & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢ & ٤- \\ ١٠ & ٢- \end{bmatrix}$

في التمارين (٧—١٢)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ ٧- & ٠,١٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{د} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤- & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & ١- & \frac{١٠}{١١}- \end{bmatrix}$$

(٧) $\underline{أ} + \underline{د}$ محكمة

(٨) $\underline{د} - \underline{أ}$ محكمة

(٩) $\underline{جـ} + \underline{ب}$ محكمة

(١٠) $\underline{أ} + \underline{ب}$ غير محكمة

(١١) $\underline{جـ} - \underline{د}$ غير محكمة

(١٢) $\underline{ب} + \underline{جـ}$ محكمة

في التمارين (١٣—١٦)، أوجد $\underline{س}$ في كل مما يلي :

(١٣) ✓
$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ ٦- & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

(١٤) ✓
$$\underline{س} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & ١٠- \end{bmatrix}$$

(١٥) ✓
$$-\underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٣- \end{bmatrix}$$

(١٦) ✓
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢٤- & ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{س} - \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ ٦- & ١٧- & ١ \end{bmatrix}$$

حل بكراسة التمارين

رقم (١٣) ص ٤٢ ؟ بطرح $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$\therefore$ س = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ١١ \\ -٨ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$

رقم (١٤) ص ٤٢

بإضافة $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix}$ للطرفين

$\therefore$ ن ج = $\begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٦٢ \\ ١٢٥ & -١١ \end{bmatrix}$

رقم (١٥) ص ٤٢

بطرح بإضافة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & -٣ \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$\therefore$ ن ـ ج = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & -٢ & -١ \\ -٧ & -٥ & ٠ \\ -١٢ & -٣ & ٠ \end{bmatrix}$

$\therefore$ ن ج = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٧ \\ ١٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

رقم (١٦) بإضافة بطرح $\begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة

$\therefore$ ن ج = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ -٢٤ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$

ج = $\begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٣٠ & -١٣ & -٤ \end{bmatrix}$

(١٧) تحليل البيانات: استخدم المعلومات في الجدول أدناه:

الشباب المختار لممارسة الأنشطة في مركزين مختلفين

	عدد الذكور في المركز	عدد الإناث في المركز
الحاسوب	٥٣	٥٧
الأعمال اليدوية	٥٤	٥٨
رياضة بدنية	٣٩	٢٩
سباحة	٤١	٦٠

(أ) ضع البيانات في مصفوفتين. وميّز كل مصفوفة.

عدد الإناث عدد الذكور

$$\begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم الفقرة (أ) لإيجاد عدد الشباب (الذكور والإناث) المشترك في كل نشاط بجمع المصفوفتين.

عدد الإناث عدد الذكور

$$\begin{bmatrix} ١١٠ \\ ١١٢ \\ ٦٨ \\ ١٠١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(ج) أوجد عدد الذكور - عدد الإناث المشتركين في كل نشاط.

$$\begin{bmatrix} -٤ \\ -٤ \\ ١٠ \\ -١٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$$

(١٨) الكتابة: بفرض أن أ، ب مصفوفتان لهما الأبعاد نفسها. وضّح: لإيجاد أ + ب نجمع كل عنصر مع نظيره

(أ) كيف يمكنك إيجاد: أ + ب، أ - ب. ، لإيجاد أ - ب نوجد النظير الجمعي لـ ب ثم نجمع كل عنصر من أ مع نظيره من النظير الجمعي لـ ب

(ب) كيف يمكنك إيجاد مصفوفة أ' بحيث أ + أ' يعطي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفرًا.

نوجد أ' بحيث يكون كل عناصره نظير جمعي لعناصر المصفوفة أ المناظرة له

المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١ – ٤)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & -٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & -٧ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ ٣,٥- & ٥,٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ ٣,٥- & ٥,٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) التصنيع: يوضّح الجدول عدد كرات الشاطئ المنتجة في مصنعين ومستويات الإنتاج لفترة عمل واحدة. المصنع الأول يعمل فترتين كل يوم، والمصنع الثاني يعمل ثلاث فترات.

	المصنع الأول		المصنع الثاني	
	بلاستيك	مطاط	بلاستيك	مطاط
لون واحد	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	١٢٠٠
ثلاثة ألوان	١٣٠٠	١٩٠٠	٦٠٠	١٦٠٠

(أ) اكتب مصفوفات لتمثل الإنتاج اليومي لكلّ مصنع.

$أ = \begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٧٠٠ \\ ١٣٠٠ & ١٩٠٠ \end{bmatrix}$ و $ب = \begin{bmatrix} ٤٠٠ & ١٢٠٠ \\ ٦٠٠ & ١٦٠٠ \end{bmatrix}$

(ب) استخدم النتائج من الفقرة أ. أوجد ناتج طرح المنتج الكلي في المصنع الثاني من المنتج الكلي في المصنع الأول.

$أ - ب = \begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٧٠٠ \\ ١٣٠٠ & ١٩٠٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤٠٠ & ١٢٠٠ \\ ٦٠٠ & ١٦٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠٠ & -٥٠٠ \\ ٧٠٠ & ٣٠٠ \end{bmatrix}$

في التمارين (٦ – ٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(٦) $\begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & -٦ \\ ٥ & -٦ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -٥ \\ ٦ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٦ \\ -٥ & ٥ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ١ & ٦ & -٦ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ٩ & ٧- & ٨ \\ ٦ & ٣- & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & ٥- & ٢ \\ ٤ & ١ & ٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٢- & ٦ \\ ٢ & ٤- & ٥ \end{bmatrix}$

(٩) يوضح الجدول التالي، ما يبيعه كل محل من العبوات المختلفة لنوعين من الشاي الأخضر و الشاي العادي: حيث يشير العدد (١) إلى أن المحل يبيع هذا المنتج، والعدد (٠) إلى أن المحل لا يبيع هذا المنتج.

	محل أ		محل ب		محل ج	
العبوة	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي	شاي أخضر	شاي عادي
٥ جرامات	٠	٠	٠	٠	١	١
١٠ جرامات	١	١	٠	٠	١	١
٢٥ جرامًا	١	١	٠	٠	٠	٠
٥٠ جرامًا	١	٠	١	١	٠	٠

(أ) اكتب ثلاث مصفوفات من الرتبة ٤ × ٢ لتمثّل الأنواع المتوفّرة لكل منتج في كل محل.

$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) اكتب مصفوفة من الرتبة ٤ × ٢ لتمثّل مجموع عدد المحلات التي تبيع كل منتج.

$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٠) السؤال المفتوح: صف موقفًا يتطلّب جمع أو طرح معلومات مخزّنة على صورة مصفوفات.

في التمارين (١١–١٣)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(١١) $\begin{bmatrix} ٣- & ٠ & ٢- \\ ١ & ٤- & ٥ \\ ٧ & ٠ & ١٠- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤- & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢- & ٠ \\ ٤- & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٨- \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ٩- & ١ & ٦ \\ ٥- & ٠ & ٩- \\ ٢ & ٢- & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ٤ \\ ٥ & ٦- & ٧ \\ ٢- & ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ١ & ١٠ \\ ٠ & ٦- & ٢- \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} \cdot & ١ \\ \cdot & \cdot \\ ١ & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & \cdot \\ ١ & \cdot \\ \cdot & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \cdot & \cdot \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & ٢- \\ ١- & \cdot \\ \cdot & ٢- \end{bmatrix}$

في التمارين (١٤–١٧)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ ٧- & ٠,١٥ \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & \cdot \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤- & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & ١- & \frac{١٠}{١١} \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{ب} - \underline{جـ}$ ممكنة

(١٥) $\underline{د} + \underline{أ}$ ممكنة

(١٦) $\underline{أ} + \underline{ب} + \underline{جـ}$ غير ممكنة

(١٧) $\underline{أ} + (\underline{جـ} - \underline{د})$ غير ممكنة

في التمارين (١٨–٢١)، أوجد $\underline{س}$ في كل مما يلي:

(١٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix} ٦- & ٥ \\ \cdot & ١ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix}$

(١٩) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١- & ٢ & \cdot \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ١١ & ٣ & ١٣- \\ ١٥ & ٩- & ٨ \end{bmatrix}$

(٢٠) $\underline{س} - \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & \cdot \end{bmatrix}$

(٢١) $\underline{س} + \begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢٨ & ١٧ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٤ \\ \cdot & ٥- \\ ١٩- & ٣ \end{bmatrix}$

حل

رقم (٨) صـ ٤٦ بطرح $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3- \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\text{ن} = \begin{bmatrix} 5 & 6- \\ 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8- \\ 1 & 1- \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

رقم (٩) صـ ٤٦

بطرح $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1- \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ من طرفي المعادلة

$$\text{ن} = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 12- \\ 15 & 9- & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1- \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 12- \\ 15 & 11- & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{ن} = \begin{bmatrix} 9- & 2- & 12 \\ 15- & 11 & 7- \end{bmatrix}$$

رقم (١٠) صـ ٤٦ بإضافة $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2- \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لطرفي المعادلة

$$\text{ن} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2- \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2- \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 6- & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

رقم (١١) صـ ٤٦ بطرح $\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 17 & 28 \\ 3- & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{ن} = \begin{bmatrix} 24 & 2- \\ 5 & 0 \\ 3 & 19- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 17 & 28 \\ 3- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22- & 28- \\ 6 & 21- \end{bmatrix}$$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

ضرب المصفوفات
Matrices Multiplication

المجموعة (تمارين أساسية)

في التمارين (١ — ٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -١٢ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -١٢ & ٢ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٤ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & -٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٥ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

(٥) الأعمال: أعدّ منسق أزهار ثلاث باقات. وضع في الأولى ثلاث زهرات ياسمين وفي الثانية ثلاث زهرات ياسمين وأربع زهرات قرنفل؛ وفي الثالثة أربع زهرات فل وثلاث زهرات قرنفل.
يبلغ ثمن زهرة الياسمين الواحدة ٠,٢١٥ دينار وثمن زهرة القرنفل الواحدة ٠,٠٩٠ دينار وثمن زهرة الفل الواحدة ٠,١٣٠ دينار.

(أ) اكتب مصفوفة تمثل عدد كل نوع من الأزهار في كل باقة.

	الياسمين	القرنفل	الفل
الباقة الأولى	٣	٠	٠
الثانية	٣	٤	٠
الثالثة	٠	٣	٤

(ب) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل نوع من الأزهار.

ثمن البنفسج
" القرنفل
" الفل

$$\begin{bmatrix} ٢١٥ و٠ \\ ٠٩٠ و٠ \\ ١٣٠ و٠ \end{bmatrix}$$

(جـ) اكتب مصفوفة تمثل ثمن كل باقة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢١٥ و٠ \\ ٠٩٠ و٠ \\ ١٣٠ و٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩٦٤٥ و٠ \\ ١ و٠٠٥ \\ ٧٩٠ و٠ \end{bmatrix}$$

ثمن الباقة الأولى
" " الثانية
" " الثالثة

في التمارين (٦ — ١٠)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ $\quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix}$ $\quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٦ \end{bmatrix}$ $\quad \underline{د} = [٧ \quad ٠]$

(٦) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ معرف (٧) $\underline{أ} \times \underline{جـ}$ معرف (٨) $\underline{جـ} \times \underline{ب}$ غير معرف

(٩) $\underline{د} \times \underline{أ}$ معرف (١٠) $\underline{د} \times \underline{جـ}$ معرف

في التمارين (١١ — ١٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١١)
$$٢\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

---

(١٢)
$$٠,٥\begin{bmatrix} ١٤ & ٣ \\ ٤- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١و٥ \\ ٢- & ٣و٥ \end{bmatrix}$$

---

(١٣)
$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١- \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

---

(١٤) الاختيار من متعدد: تبيّن الأعمدة في المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ بالترتيب، عدد المماحي وعدد الأقلام المباعة. وتبيّن الصفوف بالترتيب الأعداد المباعة يومي الاثنين والثلاثاء. تبيّن المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٠٥٠ \\ ٠,٠٢٥ \end{bmatrix}$، كلفة كل من الممحاة والقلم. ما الذي يبيّنه ناتج الضرب $\underline{أ}\underline{ب}$؟

(أ) ثمن كل المماحي المباعة يومي الاثنين والثلاثاء، وثمن الأقلام في هذين اليومين.

(ب) مجموع ثمن المماحي والأقلام يوم الاثنين ومجموع ثمنهما يوم الثلاثاء.

(جـ) مجموع ثمن الأقلام والمماحي.

(د) ثمن قلم واحد وممحاة واحدة.

٤٨

(١٥) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج. رتبة مصفوفة الضرب ٢ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & ٢- \\ \frac{٤-}{٥} & ٣ & ٦ \\ ٠ & \frac{٢-}{٣} & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- \\ ١ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٧ \\ \frac{١١-}{٥} & \frac{٧}{٥} \\ \frac{١٤-}{٣} & \frac{٢-}{٣} \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٦ — ١٩)، استخدم المصفوفات د، و، ف. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب (غير معرّفة).

$$د = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & ١- & ٢- \end{bmatrix}، \quad و = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٥- \\ ٢- & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}، \quad ف = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٥- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

(١٦) د × و معرفة $د_{٣ \times ٣} \times و_{٣ \times ٢} =$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٦- & ٥- \\ ٦ & ١ & ٥- \\ ٠ & ١٢- & ٣- \end{bmatrix}$$

(١٧) (د × و) × ف معرفة

$$\begin{bmatrix} ١ & ٦- & ٥- \\ ٥- & ١ & ٦ \\ ٠ & ١٢- & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- \\ ٥- \\ ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢٤- \\ ٢٣- & ٧- \\ ٦٩ & ١٨- \end{bmatrix}$$

(١٨) د − ٢ × و معرفة

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & ١- & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٠- & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٤- \\ ٦ & ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ١٢ & ١- \\ ٢- & ٣ & ٥ \\ ٤- & ٣- & ٤- \end{bmatrix}$$

(١٩) (٢ × د) (٣ × ف) معرفة

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٢- \\ ٠ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٢- & ٤- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٩- \\ ١٥- \\ ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٩٠- \\ ٤٢ & ٧٨- \\ ٣٠- & ٣٠- \end{bmatrix}$$

(٢٠) تعرض شركة تبيع الخردوات في محلاتها الأسعار في مصفوفة من الرتبة ١ × ٣ ومبيعات المحال الثلاثة اليومية في مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

	مطرقة	منبه ضوئي	قنديل
	٣٠٠ , ٠ دينار	٥٠٠ , ٠ دينار	٧٠٠ , ٠ دينار

	المحل أ	المحل ب	المحل ج
مطرقة	١٠	٩	٨
منبه ضوئي	٣	١٤	٦
قنديل	٢	٥	٧

(أ) أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. اشرح ما الذي يمثله.

ناتج الضرب = [٩٠٠ ٥ ... ١٣ ٣٠٠ ١٠] ويمثل دخل كل من المحلات الثلاثة بالترتيب من بيعها لأنواع الخردوات الثلاثة

(ب) كيف يمكن إيجاد المبيع العام في المحال الثلاثة؟

المبيع العام = ٢٩٤٠٠ دينار

(جـ) أوجد مبيع المنبهات الضوئية في المحال الثلاثة.

مبيع المنبهات الضوئية = ٢٣ × ٥٠٠ = ١١٥٠٠ دينار

---

(٢١) السؤال المفتوح: اكتب مصفوفتين س، ص من الرتبة ٢ × ٢ ليست كل العناصر متساوية بحيث يكون س × ص = ص × س.

$س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

---

(٢٢) أوجد قيمة كل من س ، ص: $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$٢س + ٢ = -٤$

$٢س = -٦ \Leftarrow س = -٣$ $\quad ٦س - ص = -٩$ $\quad -١٨ - ص = -٩ \Leftarrow ص = -٩$

في التمرينين (٢٣ – ٢٤) استخدم المصفوفات أ، ب ، جـ، د. حدّد ما إذا كان التعبيران في كل زوج مما يلي متساويين.

$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\quad ب = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\quad جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ $\quad د = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

✓ (٢٣) (أ + ب) × جـ ، أ × جـ + ب × جـ .

✓ (٢٤) (أ + ب) × (جـ + د) ، (أ + ب) × جـ + (أ + ب) × د .

---

(٢٥) إذا كانت م $= \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ن $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل م × ن = ن × م؟ فسّر.

م × ن $= \begin{bmatrix} -٨ & -٢٣ \\ ٤ & -٩ \end{bmatrix}$ ، ن × م $= \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -١١ & -١٨ \end{bmatrix}$ $\quad$ م × ن ≠ ن × م

ضرب المصفوفات غير إبدالي

---

(٢٦) أي ضرب مما يلي غير معرّف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}[٢ \; -١]$

(جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}[-١ \; ٢]$

(د) $[٢ \; -١]\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٥٠

حل :-

تمرين (٢٠٣) ص ٥٠ بكراسة التمارين

$$\bar{أ}+\bar{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$(\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ \\ ٤ & ١٤ \end{bmatrix}$$

$$\bar{أ} \times \bar{جـ} + \bar{ب} \times \bar{جـ} = \begin{bmatrix} ١٦ & -٥ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ١٠ \\ ٧ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٥ \\ ١٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{جـ} = \bar{أ} \times \bar{جـ} + \bar{ب} \times \bar{جـ}$$

تمرين (٢٠٤) ص ٥٠ بكراسة التمارين

$$\bar{أ}+\bar{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad \bar{جـ}+\bar{د} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(\bar{أ}+\bar{ب}) \times (\bar{جـ}+\bar{د}) = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢٣ \\ ٨ & ١٤ \end{bmatrix}$$

$$(\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٤ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$(\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{د} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$(\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{جـ} + (\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{د} = \begin{bmatrix} -١٤ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١١ & ٨ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\bar{أ}+\bar{ب}) \times (\bar{جـ}+\bar{د}) = (\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{جـ} + (\bar{أ}+\bar{ب}) \times \bar{د}$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ – ٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ٤- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨- \\ ٨- & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١- & ٣- & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٤ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣٤ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٥- \\ ٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥ – ٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا مع تفسير إجابتك.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٦ \end{bmatrix}$ $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرف لأن (٢×٢) (٢×٢) متساويان

(٦) $\underline{جـ} \times \underline{أ}$ غير معرف (٢×١) (٢×٢) غير متساويان

(٧) $\underline{ب} \times \underline{جـ}$ معرف (٢×٢) (٢×١) متساويان

(٨) $\underline{أ} \times \underline{د}$ غير معرف (٢×٢) (١×٢) غير متساويان

(٩) $\underline{جـ} \times \underline{د}$ معرف (٢×١) (١×٢) متساويان

في التمرينين (١٠ – ١١)، أوجد ناتج الضرب.

(١٠) $-١\begin{bmatrix} ٩ & ٧- & ٤- \\ ٨- & ٢- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٧ & ٤ \\ ٨ & ٢ & ٣- \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(١٢) أوجد رتبة مصفوفة ناتج الضرب، ثم أوجد ناتج الضرب. رتبة ناتج الضرب ٤ × ٤

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢- \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ١- & ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ب & ٠ \\ ج & ٠ & د \\ ٠ & ٠ & ف \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ و \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ب & ٠ & أ \\ -ف٢ & ب & ٠ & ٢و - أ \\ ف٢ & ٠ & ٠ & ٢و \\ ف & ب- & ٠ & -أ + و \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٣ — ١٦)، استخدم المصفوفات د، و، ن ثم نفذ العمليّات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليّات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$$د = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢- & ١- & ٢ \end{bmatrix} \quad و = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} \quad ن = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٥- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

(١٣) $-٣ \times ن$

$$= \begin{bmatrix} ٩ & ٦- \\ ١٥ & ٣- \\ ٦- & ١٢- \end{bmatrix}$$

(١٤) ✓ $د \times (و \times ن)$

(١٥) ✓ $(و - د) \times ن$

(١٦) ✓ $(د \times د) \times و$

(١٧) الكتابة في الرياضيات: لنفرض أن المصفوفة أ هي من الرتبة ٢ × ٣ والمصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢. هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ اشرح تفكيرك.

أ × ب ≠ ب × أ لأنه ضرب المصفوفات غير ابدالي

٥٢

حل :-

رقم (14) ص 52 $\quad \overline{\overline{\text{ع}}} \times (\overline{\text{ع}} \times \overline{\text{ن}}) \quad \overline{\overline{\text{ع}}} \times \overline{\text{ن}}$

$$\overline{\text{ع}} \times \overline{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ -7 & -6 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\text{ك}} \times (\overline{\text{ع}} \times \overline{\text{ن}}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ -7 & -6 \\ -12 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -43 \\ -33 & -7 \\ 69 & -18 \end{bmatrix}$$

رقم (15) ص 52 $\quad (\overline{\text{ع}} - \overline{\text{ك}}) \times \overline{\text{ن}}$

$$(\overline{\text{ع}} - \overline{\text{ك}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{\text{ع}} - \overline{\text{ك}}) \times \overline{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -7 & 4 \\ 3 & 11 & -4 \end{bmatrix}$$

رقم (16) ص 52 $\quad \overline{\text{ع}} \times (\overline{\text{ح}} \times \overline{\text{ح}})$

$$\overline{\text{ح}} \times \overline{\text{ح}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{\text{ح}} \times \overline{\text{ح}}) \times \overline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 8 & -15 \\ 10 & -9 & -10 \\ 2 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

(١٨) اكتب مصفوفة تمثل العائد اليومي للبطاقات المباعة مستخدمًا الجدولين التاليين:

أسعار البطاقات بالدينار	درجة ١	درجة ٢	درجة ٣
	٧	٦	٥

عدد البطاقات المباعة	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد البطاقات المباعة درجة ١	١٥٠	١٣٠	١٦٠
عدد البطاقات المباعة درجة ٢	١٢٥	١٣٠	١٧٥
عدد البطاقات المباعة درجة ٣	٦٠	٥٢	٨٠

$$\begin{bmatrix} ١٦٠ & ١٣٠ \\ ١٧٥ & ١٣٠ \\ ٨٠ & ٥٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥٠ \\ ١٢٥ \\ ٦٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥٧٠ & ١٩٥٠ & ٢١٠٠ \end{bmatrix}$$

(١٩) حل المعادلة المصفوفية، ثم أوجد قيمة كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢س^{٢} & ٦س - ص \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$$

$٢س^{٢} = -٤$ ، $٦س - ص = -٩$

$س = -٢$ ، $-١٢ - ص = -٩$

$-ص = -٩ + ١٢$

$ص = ٣$

$\therefore ص = -٣$

في التمرينين (٢٠ – ٢١)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$، $\underline{جـ}$، $\underline{د}$، $\underline{هـ}$ لتبين صحة العبارة في كل منهما.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \quad \underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad \underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

(٢٠) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ}$.

$= \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ← ①

(٢١) $(\underline{أ} + \underline{ب})(\underline{جـ} + \underline{د}) = \underline{أ} \times \underline{جـ} + \underline{أ} \times \underline{د} + \underline{ب} \times \underline{جـ} + \underline{ب} \times \underline{د}$.

$\underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ← ②

م، ن، ع تجمان $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ}$

$(\underline{أ} + \underline{ب})(\underline{جـ} + \underline{د}) = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٢ \\ ٤ & ٢٠ \end{bmatrix}$ ← ③

$\underline{أ} \times \underline{جـ} + \underline{أ} \times \underline{د} + \underline{ب} \times \underline{جـ} + \underline{ب} \times \underline{د} = \begin{bmatrix} ١٦ & -٥ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ١٠ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٤ & ٢ \\ ٤ & ٢٠ \end{bmatrix}$ ∴ العبارة صحيحة

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)
Identity Matrices and Inverse Matrix

المجموعة الأولى: تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢)، بين أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{١٠}- & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٠}- & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

في التمارين (٣ – ٧)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٠ & ٣- \end{vmatrix} = ٢١- - ٠ = ٢١-$

(٤) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٦- & ٢- \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٦- & ٢- \end{vmatrix} = ١٢- - (١٢-) = ٠$

(٥) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{vmatrix} = \frac{١}{٨} - \frac{٤}{١٥} = \frac{١١-}{٤٠}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٤- & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ - ٦ = ٦-$

في التمارين (٨ — ١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$

---

(٩) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٦} \begin{bmatrix} ٢- & ٨- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

---

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$

---

(١١) $\begin{bmatrix} ٦ & ٨- \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix}$

لا يوجد نظير ضربي لأنه $\begin{vmatrix} ٦ & ٨- \\ ٣- & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر

في التمرينين (١٢ — ١٣)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٢) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ٥- & ١٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٥- & ١٧- \\ ٢٦ & ٢٩ \end{bmatrix}$

---

(١٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤- & ٠ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

لا يمكن حلها لأنه $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤- & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

---

* (١٤) تحليل البيانات: يجدد ٥ ,٩٩٪ من مشتركي اللاقط التليفزيوني اشتراكهم للعام التالي بينما ٥ ,٠٪ منهم لا يجددون اشتراكهم. ٩٨٪ من غير المشتركين يبقون دون اشتراك بينما ٢٪ منهم يشتركون في اللاقط العام التالي.

(أ) اكتب مصفوفة تبيّن التغير في اشتراك اللاقط.

$\underline{أ} = \begin{matrix} \\ \text{مشترك} \\ \text{غير مشترك} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{مشترك} & \text{غير مشترك} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ٠,٩٩٥ & ٠,٠٢ \\ ٠,٠٠٥ & ٠,٩٨ \end{bmatrix} \end{matrix}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٠,٩٧٥} \begin{bmatrix} ٠,٩٨ & ٠,٠٢- \\ ٠,٠٠٥- & ٠,٩٩٥ \end{bmatrix}$

(ب) في عينة من ٣٠٠٠٠ شخص اشترك ٢٠٠٠٠ منهم باللاقط. توقّع عدد مشتركي اللاقط من هذه العينة العام القادم.

عدد مشتركي اللاقط العام القادم

$\begin{bmatrix} ٠,٩٩٥ & ٠,٠٢ \\ ٠,٠٠٥ & ٠,٩٨ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠١٠٠ \\ ٩٩٠٠ \end{bmatrix}$

$= ٢٠١٠٠$

(ج) استخدم النظير الضربي للمصفوفة في (أ) لإيجاد عدد مشتركي اللاقط في العام السابق.

$$\begin{bmatrix} \frac{٠٫٩٨}{٠٫٩٧٥} & \frac{-٠٫٠٢}{٠٫٩٧٥} \\ \frac{-٠٫٠٠٥}{٠٫٩٧٥} & \frac{٠٫٩٩٥}{٠٫٩٧٥} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩٨٩٧ \\ ١٠١٠٣ \end{bmatrix}$$

في التمارين (١٥–١٧)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٥) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -٤ & ٤ \end{vmatrix} = ١٦ + ٢٠ = ٣٦$

∴ عدد مشتركي اللاقط العام السابق = ١٩٨٩٧

(١٦) $\begin{vmatrix} \frac{١}{٢}- & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{vmatrix} = -٤ + ٤ = ٠$

(١٧) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٠ = ٢$

في التمرينين (١٨–١٩)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

(١٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠٫٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٠٫٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١٠ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للأخرى

(١٩) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ٨ \\ -٤٦ & -١٦ \end{bmatrix} \neq \text{و}$$

لا، لأن حاصل ضربهما ≠ و

في التمارين (٢٠–٢٣)، حدّد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد النظير الضربي للمصفوفة وفي حال عدم وجوده. اشرح السبب.

(٢٠) $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$$\text{P}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

(٢١) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\text{P}^{-١} = \frac{١}{-٦} \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

(٢٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ١١ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$

$$\text{P}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٧ & ١١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -١١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$$

(٢٣) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

لا يوجد نظير ضربي لأن $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٦ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ صفر

(٢٤) أوجد المصفوفة س: $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ س $+ \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

---

(٢٥) حل المعادلة: $-٢ \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times$ س $+ \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix}$

---

(٢٦) إذا كانت س $\in$ ح: أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$ ونظيرها الضربي: س $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة س؟

حل - تمرين ٢٤، ٢٥، ٢٦ في الصفحة المقابلة صـ ٥٤

حل :-

رقم (٤٢) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{ب} + \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ١٠- & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٥- \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

رقم (٤٥) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \underline{ب} + \begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & ٢٧- \\ ١٠ & ٤٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \underline{ب} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & ٢٧- \\ ١٠ & ٤٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٩ & ٢٧- \\ ١٠ & ٤٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٢٤- \\ ٥ & ٢٢- \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٥- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥ & ٢٤- \\ ٥ & ٢٢- \end{bmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ٣٠ & ٤٥- \\ ١٢٠ & ٧٥- \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٨ & ٥- \end{bmatrix}$$

رقم (٤٦) ص ٥٧

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢س & ٤س \\ ٣س- & ٢س- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س & ٠ \\ ٠ & ٢س \end{bmatrix}$$

$$٢س = ١ \quad ، \quad ٦س = \frac{١}{٢}$$

المجموعة ت تمارين تعزيزية

ص٥٧

بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هما نظير ضربي للأخرى

في التمارين (٢ – ٦)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠,٥ \\ ٢ & ١,٥ \end{bmatrix}$ $\Delta = ٠ - ٠,٧٥ = -٠,٧٥$

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ $\Delta = -٢ - ١٥ = -١٧$

(٤) $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ $\Delta = ٢ - ٠ = ٢$

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ $\Delta = ٥ + ٦ = ١١$

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$ $\Delta = -٨ + ٥ = -٣$

في التمارين (٧—١٠)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي».

(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ $\frac{١}{-١}\begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ١,٥- & ٣ \\ ٢,٥ & ٠,٥- \end{bmatrix}$ $\frac{١}{-٦,٧٥}\begin{bmatrix} ٠,٥- & ٣- \\ ٢,٥- & ١,٥- \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ $\frac{١}{-٦}\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٠) $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ $\frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$

(١١) أوجد $\underline{س}$: $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$\underline{س} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$= \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣٥- \\ ٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧,٥ \\ ١٥ \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٢—١٣)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٢) $\begin{vmatrix} ١٠ & ٣- \\ ٢٠ & ٦ \end{vmatrix} = -٦٠ - ٦٠ = -١٢٠$

(١٣) $\begin{vmatrix} ٩ & ٦ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٧ - ٣٦ = ٩$

(١٤) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$$\begin{bmatrix} -٢ & -٢ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -٥,٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & -٥ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥,٢ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

لذ ، لأن حاصل ضربها ≠ مصفوفة الوحدة

في التمارين (١٥–١٨)، حدّد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي. في حال وجوده أوجد المصفوفة وفي حال عدم وجوده اشرح السبب.

(١٥) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ $\quad \bar{P}^{١} = \frac{١}{-٩} \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

(١٦) $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ $\quad \bar{P}^{١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٤ & ٧ \end{bmatrix}$

(١٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\quad \bar{P}^{١} = \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ $\quad \bar{P}^{١} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٩) أوجد س: $\begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٦ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & -٩ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$

(٢٠) حل المعادلة: $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} - \begin{bmatrix} ٢ & -٢٦ \\ ٣ & -١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢٥ \\ ٢ & ٢٤ \end{bmatrix}$

حل رقم ١٩، ٢٠ في الصفحة القادمة ص٥٨

حل:-

رقم (١٩) ص٥٩

$$\begin{bmatrix} -٧ & -٩ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٦- & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٧ & -٩ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ٧- & ٤- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١ & ٦- \end{bmatrix}$$

رقم (٢٠) ص٥٩

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} + \begin{bmatrix} ٢- & ٢٠ \\ ٢٠ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢٥ \\ ٢٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢٥ \\ ٢٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٢٠ \\ ٢٠ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٧-} \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{٧-} \begin{bmatrix} ٧ & ٧ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving System of Two Linear Equations

المجموعة ١ تمارين أساسية

في التمرينين (١ — ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محدداً مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} س + ص = ٥ \\ س - ٢ص = -٤ \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$$

ثوابت متغيرات معاملات

(٢) $\begin{cases} ٢س + ٥ص = ٠ \\ س + ص = ٢ \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

ثوابت متغيرات معاملات

في التمرينين (٣ — ٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

$٣س - ص = -١$
$٢س + ٤ص = ٣$

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

$٢س + ٤ص = ٥$
$-س - ٢ص = -٢$

في التمارين (٥ — ٧)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) $\begin{cases} س + ٣ص = ٥ \\ س + ٤ص = ٦ \end{cases}$

(٦) $\begin{cases} س - ٣ص = -١ \\ -٥س + ١٦ص = ٥ \end{cases}$

(٧) $\begin{cases} س + ٥ص = -٤ \\ س + ٦ص = -٥ \end{cases}$

حل

رقم (٥) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$أ \times ع = ب \qquad ع = أ^{-1} \times ب$$

$$أ^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ع = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad س = 2 \text{ ، } ص = 1$$

رقم (٦) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 16 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore س = -1 \text{ ، } ص = 0$$

رقم (٧) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore س = 1 \text{ ، } ص = -1$$

في التمارين (٨ — ١١)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًا وحيدًا أم لا.

(٨) $\begin{cases} ٢٠س + ٥ص = ٢٤٠ \\ ص + ٢٠س = ٠ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٢٠ & ١ \end{vmatrix} = -٨٠ \neq ٠$ حل وحيد

---

(٩) $\begin{cases} ٣س + ٢ص = ١٠ \\ ٦س + ٤ص = ١٦ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ لا

---

(١٠) $\begin{cases} ص = \frac{٢}{٣}س - ٣ \\ ص = -س + ٧ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{٢}{٣} & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

---

(١١) $\begin{cases} ٢٠س + ٥ص = ١٤٥ \\ ٣٠س - ٥ص = ١٢٥ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٣٠ & -٥ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

في التمارين (١٢ — ١٤)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(١٢) ✓ $\begin{cases} ٢س + ص = ٤ \\ ٣س - ص = ٦ \end{cases}$

---

(١٣) ✓ $\begin{cases} ٢س + ص = ٧ \\ -٢س + ٥ص = -١ \end{cases}$

---

(١٤) ✓ $\begin{cases} ٢س + ٤ص = ١٠ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$

---

(١٥) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص وماحي. يبلغ ثمن علبة تحتوي على ٥ ماحي وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ ماحي و٥ أقلام ٢٦٥٠ فلسًا. أوجد ثمن المحاة وثمن القلم مستخدمًا النظير الضربي للمصفوفة.

$٥س + ٢ص = ١٥٠٠$
$٧س + ٥ص = ٢٦٥٠$

$\begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{١١} \begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٠٠ \\ ٥٠٠ \end{bmatrix}$

∴ ثمن المحاة = ٢٠٠ فلس

ثمن القلم = ٥٠٠ فلس

المجموعة ت غاردن تورنر

في التمرينين (١ — ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} ص = ٣س - ٧ \\ ص = ٢ \end{cases}$

$-٣س + ص = -٧$
$ص = ٢$

معاملات — متغيرات — ثوابت

$\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ٢ \end{bmatrix}$

مراجعة حل تمرين ١٢، ١٣، ١٤، ١٥ صـ ٦٤ في الصف لبنات دقة

حل

تمرين (١٢) ص ٦١

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $\quad س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$

$\Delta س = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 10$ $\quad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad م.ع = \{(2,0)\}$

تمرين (١٣) ص ٦٢

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12$ $\quad س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3$

$\Delta س = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -36$ $\quad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12$ $\quad م.ع = \{(3,1)\}$

تمرين (١٤) ص ٦١ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$

$\Delta س = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = -8$ $\quad \Delta ص = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = -6$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4$ $\quad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3$ $\quad م.ع = \{(4,3)\}$

تمرين (١٥) ص ٦١ باستخدام قاعدة كرامر (المحددات)

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -11$ $\quad \Delta س = \begin{vmatrix} 2 & 1000 \\ 5 & 2650 \end{vmatrix} = -220$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} 1000 & 5 \\ 2650 & 7 \end{vmatrix} = -2750$ $\quad س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-2200}{-11} = 200$

$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-2750}{-11} = 250$

∴ عدد المحاضرات = 200 ، أجر المحاضرة = 250 جنيه

(٢) $\begin{cases} س + ٢ص = ١١ \\ ٢س + ٣ص = ١٨ \end{cases}$ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٨ \end{bmatrix}$

في التمارين (٣ — ٥)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

(٣) ✓ $\begin{cases} ٣٠٠س - ص = ١٣٠ \\ ٢٠٠س + ص = ١٢٠ \end{cases}$

(٤) ✓ $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١٢ \\ س + ٢ص = ٧ \end{cases}$

(٥) ✓ $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٥ \\ س + ٢ص = ٦ \end{cases}$

رقم ⑤

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$

∴ س = -٨ ، ص = ٧

في التمارين (٦ — ٨)، حلّ المعادلة المصفوفية إن أمكن:

رقم ⑥

(٦) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$

∴ س = ٦ ، ص = ٢

---

(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ حل المعادلة غير ممكن

---

(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ \\ -١٨ \end{bmatrix}$

∴ س = ١٤ ، ص = -١٨

في التمارين (٩ — ١٢)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(٩) ✓ $\begin{cases} ٥,٠س + ٥,١ص = ٧ \\ ٥,٢س - ٥,٣ص = -٩ \end{cases}$

(١٠) ✓ $\begin{cases} -٢,١س - ٣,٠ص = ٢,١ \\ -٢,٠س + ٨,٠ص = ٤,٦ \end{cases}$

(١١) ✓ $\begin{cases} \frac{س}{٥} - \frac{٢ص}{٥} = ٤ \\ \frac{٢س}{٥} - \frac{٣ص}{٥} = ٥ \end{cases}$

رقم ⑫

(١٢) $\begin{cases} \frac{س}{٢} + \frac{ص}{٤} = ٤ \\ \frac{س}{٤} - \frac{٣ص}{٨} = -٢ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٣}{٨} & -\frac{١}{٤} \end{vmatrix} = -٠,٢٥$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٤ & \frac{١}{٤} \\ -٢ & -\frac{١}{٤} \end{vmatrix} = -١$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٤ \\ \frac{٣}{٨} & -٢ \end{vmatrix} = -٢$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-١}{-٠,٢٥} = ٤$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٢}{-٠,٢٥} = ٨$

حل

رقم (٣) ص ٦٢ $\begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٢٠٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢٠ \\ ١٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠٠} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٢٠٠ & ٣٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٢٠ \\ ١٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠٠} \begin{bmatrix} ٢٤٠ \\ ١٠٠٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠٫٤٨ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ ∴ س = ٠٫٤٨ ، ص = ٢٠

رقم (٤) ص ٦٢ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ∴ س = ٣ ، ص = ٢

رقم (٩) ص ٦٢ $\Delta = \begin{vmatrix} ٠٫٥ & ١٫٥ \\ ٢٫٥ & -٣٫٥ \end{vmatrix} = -٥٫٥$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٧ & ١٫٥ \\ -٩ & -٣٫٥ \end{vmatrix} = -١١$ ، $\Delta ص = \begin{vmatrix} ٠٫٥ & ٧ \\ ٢٫٥ & -٩ \end{vmatrix} = -٢٢$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-١١}{-٥٫٥} = ٢$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٢٢}{-٥٫٥} = ٤$

رقم (١٠) ص ٦٢ $\Delta = \begin{vmatrix} ١٫٢ & -٠٫٣ \\ -٠٫٢ & ٠٫٨ \end{vmatrix} = ٠٫٩٦$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٢٫١ & -٠٫٣ \\ ٤٫٦ & ٠٫٨ \end{vmatrix} = ٣٫٠٦$ ، $\Delta ص = \begin{vmatrix} ١٫٢ & ٢٫١ \\ -٠٫٢ & ٤٫٦ \end{vmatrix} = ٥٫١$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٣٫٠٦}{٠٫٩٦} = ٣$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = ٥$

(١٣) يقوم أحد مصانع الدهانات بمزج الألوان مع بعضها بعضًا لإنتاج ألوان مميزة. إذا مزج جزئين من اللون الأحمر إلى ستة أجزاء من اللون الأصفر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون البرتقالي شبيه بلون فاكهة اليقطين. وإذا مزج خمسة أجزاء من اللون الأصفر مع ٣ أجزاء من اللون الأحمر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون الأحمر الداكن شبيه بلون الفلفل الأحمر. تباع صفيحة اللون البرتقالي بـ ٢٥ دينارًا وصفيحة اللون الأحمر الداكن بـ ٢٨ دينارًا، علمًا أن كل صفيحة تحتوي على ٨ أجزاء.

(أ) اكتب نظام معادلات يمثّل المسألة أعلاه.

نفرض أن سعر كل جزء من الدهان الأحمر = س ، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ص

$$٢س + ٦ص = ٥٢$$

$$٣س + ٥ص = ٨٢$$

(ب) حل النظام مستخدمًا قاعدة كرامر، استنتج سعر كلّ جزء من الدهان الأحمر وسعر كل جزء من الدهان الأصفر.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٨ = -٨$$

$$\Delta_س = \begin{vmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٢٨ & ٥ \end{vmatrix} = ١٢٥ - ١٦٨ = -٤٣$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-٤٣}{-٨} = ٥٫٣٧٥$$

$$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٢٥ \\ ٣ & ٢٨ \end{vmatrix} = ٥٦ - ٧٥ = -١٩$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{-١٩}{-٨} = ٢٫٣٧٥$$

∴ سعر كل جزء من الدهان الأحمر = ٥٫٣٧٥ دينار

، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ٢٫٣٧٥ دينار

دمم ⑪ ص ٦٢

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{٤}{٥} & -\frac{١}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & -\frac{٢}{٥} \end{vmatrix} = ٠٫٠٤$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-٠٫٤}{٠٫٠٤} = -١٠$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{-٠٫٦}{٠٫٠٤} = -١٥$$

$$\Delta_س = \begin{vmatrix} ٤ & -\frac{١}{٥} \\ ٥ & -\frac{٢}{٥} \end{vmatrix} = -٠٫٤$$

$$\Delta_ص = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & ٤ \\ \frac{٤}{٥} & ٥ \end{vmatrix} = -٠٫٦$$

اختبار الوحدة السابعة

(١) يبيّن الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	°٣٠	°٣٧-
٢	°٤٠	°٣٣-
٣	°٤٢	°١٤-
٤	°٣٧	°١-
٥	°٣٩	°٢٨-
٦	°٤٤	°٢-

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه المصفوفة؟

$$\begin{bmatrix} ٣٠ & ٣٧- \\ ٤٠ & ٣٣- \\ ٤٢ & ١٤- \\ ٣٧ & ١- \\ ٣٩ & ٢٨- \\ ٤٤ & ٢- \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة ٦×٢

(ب) حدد $أ_{٤٢}$. $أ_{٤٢} = -١$

في التمرينين (٢–٣)، أوجد الناتج.

(٢) $\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٨ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥- \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ١٣ & ١٦ \\ ٢٤ & ٣- & ١٩ \\ ٩ & ١٠ & ٢٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & ٧ & ١٨- \\ ٥ & ١٥ & ١١ \\ ١٢ & ١٤ & ١٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ٢٠ & ٢- \\ ٢٩ & ١٢ & ٣٠ \\ ١٩ & ٢٤ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٤ — ٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب وفي حالة عدم إمكانية الضرب اكتب "غير محدد".

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٥ \\ ١٢ & ٦ \\ ٥٢ & ١٨ \end{bmatrix}$

(٣×٢) (٢×١) (٣×١)
تساويان

(٥) $-٣\begin{bmatrix} ٣ & ١٠ \\ ٢١ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٣٠- \\ ٦٣- & ١٢ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٩ & ١٥ & ٦ \\ ٢ & ٨- & ٧ \\ ٦٣ & ٨- & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٠ \\ ٥- & ٠ & ٨ \end{bmatrix}$

(٣×٣) (٣×٢)
غير تساويان
حاصل الضرب غير محدد

(٧) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢×٢) (٢×١) (٢×١)
تساويان

في التمرينين (٨ — ٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

(٨) $\begin{bmatrix} ٦- & ٦- \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ $\Delta = (-٦ \times ٨) - (٥ \times -٧) = -١٣$

(٩) $\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٩ & ٢- \end{bmatrix}$ $\Delta = (١ \times ٩) - (-٢ \times -٥) = -١$

في التمرينين (١٠ — ١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة وإلّا فاكتب (لا يوجد).

(١٠) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ $P^{-١} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٤- & ١٦- \end{bmatrix}$ $\Delta =$ صفر
∴ لا يوجد نظير ضربي

في التمارين (١٢–١٧)، حل في س.

(١٢) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -١ & -١ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٨ \\ -١ & ٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٦) $٤\underline{س} + ٣ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٧) $٢\underline{س} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٨ & -٨ \end{bmatrix}$

(١٨) حل النظام: $\begin{cases} ٢س - ص = ٢ \\ ٢س - ٢ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: $\begin{cases} -٣س + ٥ص = -٤ \\ س - ٣ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة كرامر.

(٢٠) اكتب مصفوفتين أ، ب كل منهما من الرتبة ٢ × ٢. أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظير الضربي للأخرى؟

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى

(٢٢) اشتريت ١٠ قرنفلات و٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشتريت ٥ قرنفلات و٨ أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا. فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

$$\begin{cases} ١٠س + ٥ص = ١٢,٥٠٠ \\ ٥س + ٨ص = ١١,٧٥٠ \end{cases} \quad \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢,٥٠٠ \\ ١١,٧٥٠ \end{bmatrix}$$

تمرين (١٥) ص ٦٦ $\quad$ $\text{ب}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\text{أ ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

تمرين (١٦) ص ٦٦ $\quad$ $4\text{س} + \text{ص} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\text{س} - \text{ص} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تمرين (١٨) ص ٦٦

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{س} = 0 \text{ ، ص} = -2$$

تمرين (١٩) ص ٦٦

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad \therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ ، ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$$

تمرين (٢٠) ص ٦٦

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ، } \text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{أ} \times \text{ب} \neq \text{ب} \times \text{أ}$$

تمرين (٢٢) ص ٦٦

بكتابة النظام على الصورة

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12,50 \\ 11,75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,750 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{س} = 0,750 \text{ ، ص} = 1$$

$\therefore$ سعر القرنفلة $= 0,750$ دينار ، سعر الأقحوانة $= 1$ دينار

تمارين إثرائية

(١) لنعتبر $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(أ) هل للمصفوفات: $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{أ} + \underline{ب}$ نظير ضربي؟

(ب) أوجد $\underline{أ}^{-١}$، $\underline{ب}^{-١}$، $(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١}$.

(جـ) وضّح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ مصفوفتان ذات نظير ضربي، $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي مصفوفة ذات نظير ضربي فإن

$(\underline{أ} + ب)^{-١} = \underline{أ}^{-١} + \underline{ب}^{-١}$.

(د) أعطِ مثلًا عن مصفوفتين ذات نظير ضربي شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعهما نظيرًا ضربيًّا.

(٢) لنعتبر $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$

(أ) أوجد $\underline{أ} + \underline{ب}$، ثمّ $(\underline{أ} + \underline{ب})^{٢}$.

(ب) أوجد $\underline{أ}^{٢}$، $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب}^{٢}$ ثمّ $\underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^{٢}$. قارن بين إجابتيك في (ب)، (أ).

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

(ج) طبّق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$.

$= \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} + \underline{ب})^٢ = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٠ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^٢ = \begin{bmatrix} -١ & ك \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix}$، $\underline{أ}^٢ \times \underline{ب}^٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ١٣ & -٦ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ك \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٧ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٤- & ٢ \\ -٦ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & -٤ \\ -٢ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ∴ $(\underline{أ} + \underline{ب})^٢ = \underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^٢$

(٣) إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر ربيع من مثلي عمر جاد نحصل على ٥. أمّا إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر جاد من خمسة أمثال عمر ربيع نحصل على -٢.

(أ) مثّل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

نفرض أن عمر جاد = س ، عمر ربيع = ص

$٢س - ٣ص = ٥$

$٥ص - ٣س = -٢$

$٣س - ٥ص = ٢$

(ب) اكتب نظام معادلات على شكل معادلة مصفوفية: $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$،

حيث $\underline{أ}$ هي مصفوفة مربّعة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$، $\underline{ب}$ من الرتبة ٢ × ١.

$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix}$

(ج) أوجد محدد المصفوفة $\underline{أ}$. هل للمصفوفة $\underline{أ}$ نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيرًا ضربيًّا فأوجد $\underline{أ}^{-١}$.

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠ + ٩ = -١$ يوجد نظير ضربي

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

(د) أوجد قيم س، ص باستخدام $\underline{أ}^{-١}$.

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \\ ١١ \end{bmatrix}$

∴ عمر جاد = ١٩ ، عمر ربيع = ١١

(هـ) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر. $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠ + ٩ = -١$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = -١٩$ ، $س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-١٩}{-١} = ١٩$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -١١$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-١١}{-١} = ١١$

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:

$$\underline{و} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}، \quad \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(أ) احسب $\underline{أ}^{٢}$، $\underline{أ}^{٣}$.

$$\underline{أ}^{٣} = \underline{أ}^{٢} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(ب) لكل عدد حقيقي س، نعتبر المصفوفة $\underline{م}(س)$، حيث إنّ:

$$\underline{م}(س) = \underline{و} + س\,\underline{أ} + \frac{س^{٢}}{٢} \times (\underline{أ}^{٢}).$$

١. احسب: $\underline{م}(٠)$، $\underline{م}(٤)$.

$$\underline{م}(٠) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + ٠ + \frac{٠}{٢}(\underline{أ}^{٢}) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{م}(٤) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٩ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$$

---

٢. س ، ص عددان حقيقيان، إحسب $\underline{م}(س) \times \underline{م}(ص)$.

$$\underline{م}(س) \times \underline{م}(ص) = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ص & \frac{ص^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & س+ص & \frac{ص^{٢}}{٢} + س ص + \frac{س^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س+ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

---

٣. برهن أنّ: $\underline{م}(س) \times \underline{م}(ص) = \underline{م}(س + ص)$.

$$\underline{م}(س+ص) = \begin{bmatrix} ١ & س+ص & \frac{(س+ص)^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س+ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{م}(س) \times \underline{م}(ص) = \underline{م}(س+ص)$$

(جـ) تحقق من أنّ: $\underline{م}(س) = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{م}(س) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & س & ٠ \\ ٠ & ٠ & س \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & س^{٢} \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

(٥) التفكير الناقد: لتكن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$. ما هي قيم العناصر أ، ب، جـ، د عندما يكون النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ هو $\underline{أ}$ ؟ (مساعدة: هناك أكثر من إجابة صحيحة واحدة).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \qquad \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي
The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة ١: تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{4}$
١٣٥°	$\frac{3\pi}{4}$
−١٨٠°	$-\pi$
−١٥٠°	$-\frac{5\pi}{6}$
−٢٢٥°	$-\frac{5\pi}{4}$
١٥٠°	$\frac{5\pi}{6}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلًّا من: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(أ) جا٣٠° = $\frac{1}{2}$

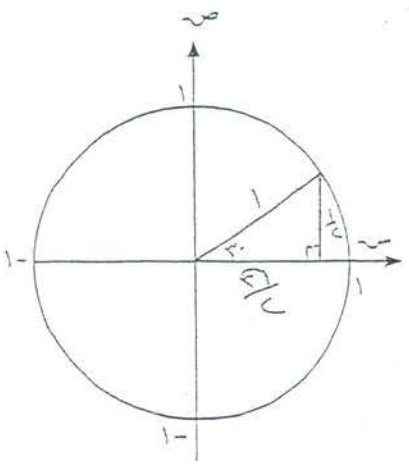
(ب) جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(جـ) ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(د) ظتا٣٠° = $\sqrt{3}$

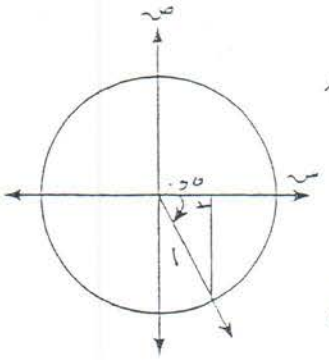
(هـ) قا٣٠° = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(و) قتا٣٠° = ٢



في التمرينين (٣-٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:

(٣) $-٦٠°$

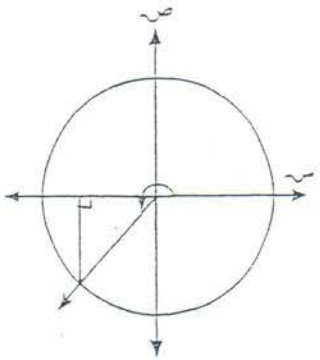


إحداثيا النقطة المناظرة $\left(\frac{١}{٢}، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$\text{جتا}(-٦٠°) = \frac{١}{٢}$

$\text{جا}(-٦٠°) = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) $٢٢٥°$



إحداثيا النقطة المناظرة $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

$\text{جتا}٢٢٥° = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\text{ظا}٢٢٥° = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

في التمارين (٥-٨)، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية. ثمّ قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

(٥) $٣٢°$ $\text{جتا}٣٢° = ٠٫٨٥$ $\text{جا}٣٢° = ٠٫٥٣$ $\text{ظا}٣٢° = ٠٫٦٢$

(٦) $-٤٥°$ $\text{جتا}(-٤٥°) = ٠٫٧١$ $\text{جا}(-٤٥°) = -٠٫٧١$ $\text{ظا}(-٤٥°) = -١$

(٧) $-٩٧°$ $\text{جتا}(-٩٧°) =$ $\text{جا}(-٩٧°) =$ $\text{ظا}(-٩٧°) =$

(٨) $١٥٤°$ $\text{جتا}(١٥٤°) =$ $\text{جا}(١٥٤°) =$ $\text{ظا}(١٥٤°) =$

في التمارين (٩-١١)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٩) $\frac{\pi}{٤}$ $\text{جتا}\frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ $\text{جا}\frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ $\text{ظا}\frac{\pi}{٤} = ١$

(١٠) $٦٠°$ $\text{جتا}٦٠° = \frac{١}{٢}$ $\text{جا}٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\text{ظا}٦٠° = \sqrt{٣}$

(١١) $٠°$ $\text{جتا}٠° = ١$ $\text{جا}٠° = ٠$ $\text{ظا}٠° = ٠$

في التمارين (١٢-١٥)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

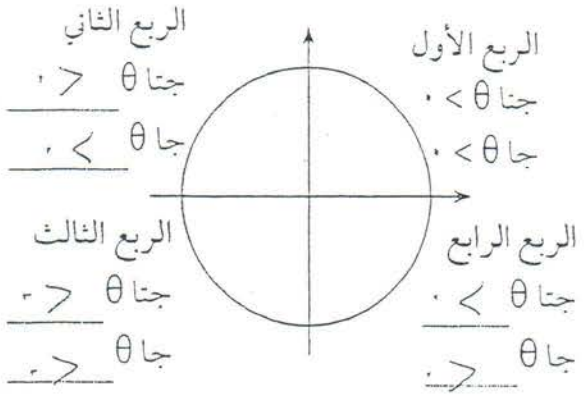
(١٢) $١٥٠°$ في الربع الثاني

(١٣) $-\pi$ على محور السينات السالب

(١٤) $-٦٠°$ في الربع الرابع

(١٥) $\frac{٧\pi}{٦}$ في الربع الثالث

(١٦) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في :

(أ) الربع الأول (الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٧) الكتابة في الرياضيات: فسّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

باستخدام النقط المثلثية ، ٠° ← (١، ٠)

٩٠° ← (٠، ١) ، ١٨٠° ← (-١، ٠)

٢٧٠° ← (٠، -١) ، ٣٦٠° ← (١، ٠)

في التمارين (١٨ - ٢٥)، استخدم المنقلة وارسم كلًّا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٨) ٢١٠° ∝ = ٣٠°

(١٩) $\frac{\pi ٢}{٣}$ ∝ = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٠) ١٧٠° ∝ = ١٠°

(٢١) $\frac{\pi ٧}{٣}$ ∝ = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٢) -١٣٥° ∝ = ٤٥°

(٢٣) $-\frac{\pi ٧}{٦}$ ∝ = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٤) -٢٤٠° ∝ = ٦٠°

(٢٥) $-\frac{\pi ١١}{٦}$ ∝ = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° ١١٠°

(٢٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م($\frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$) التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

٣١٥° (د) ٣٣٠°

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ - ٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا (-٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا (١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا (-١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا (٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠°

(جـ) $\frac{\pi ٥}{٣}$ (د) $\frac{\pi ١٣}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{\pi ٧}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(جـ) $\frac{\pi ٣}{٤}$ ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{\pi ١١}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{\pi ٧}{٨}$ $\frac{\pi ٥}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -٥٢٢٥°.فإن النقطة التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

(د) (-١، ١)

(٩) [جا(-١٣٥°)]^{٢} + [جتا(-١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١

(ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$

(د) صفر

تمرّن ٨-٢

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة (تمارين أساسية)

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا(θ + π) = - جا θ

(ب) جتا(θ - π) = - جتا θ

(جـ) جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ = جتا θ

(د) جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ = جا θ

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(٠١٨٠ - س) = - ظا س

(ب) جتا(٠١٨٠ + س) = - جتا س

(جـ) جا(- س) = - جا

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا(θ + π) = ظتا θ

(ب) قتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ = قا θ

(جـ) ظتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ = - ظا θ

(د) قا(- θ) = قا θ

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظا(-٢٢٥°) = - ظا ٢٢٥° = - ظا (١٨٠° + ٤٥°) = - ظا ٤٥° = - ١

(جـ) جتا(-١٣٥°) = جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠ - ٤٥) = - جتا ٤٥° = $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = جتا $\left(\pi + \frac{\pi}{٦}\right)$ = - جتا $\frac{\pi}{٦}$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = - جا $\frac{٢\pi}{٣}$ = - جا $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = - جا $\frac{\pi}{٣}$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ = ظا $\left(٢\pi - \frac{\pi}{٦}\right)$ = - ظا $\frac{\pi}{٦}$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) ظتا ٣٩٠° = ظتا (٣٦٠ + ٣٠) = ظتا ٣٠ = $\sqrt{٣}$

(ب) جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠ + ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

(جـ) قتا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠ + ٩٠) = قتا ٩٠ = ١

(د) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ = قا $\left(٤\pi + \frac{\pi}{٤}\right)$ = قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٢}$

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ — (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ — (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣ — (أ)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = - ٥ — (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ - جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

= - جتا θ - جتا θ - جا θ + جا θ = - ٢ جتا θ

(ب) جا$(\pi + \theta)$ - جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

= - جا θ + جا θ - جتا θ + جتا θ = صفر

✓ (١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = $+\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = $+\sqrt{٢}$

(د) جا(٤س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) جتا$\left(٢س + \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(و) جا$\left(\frac{\pi}{٦} - س\right)$ = جا$\left(٢س - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(ز) جتا$\left(\frac{\pi}{٨} + س\right)$ = ١

(حـ) ظا(٣π + ٢س) = ظتا(٢س)

ملاحظة: صل رقم (١٢) صـ ٨١ في الصفحة السابقة

ر م (١٢) ص ٧٧

(٥) $\text{جتا}\, س = \frac{١}{٢}$

$\text{جتا}\, س = \text{جتا}\, \frac{\pi}{٣}$

$\therefore$ س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

$\therefore س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

أو $س = -\frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

(٦) $\text{جا}\, س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{جا}\, س = \text{جا}\, \frac{\pi}{٣}$

$\therefore$ س تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

أو $س = (\pi - \frac{\pi}{٣}) + ٢ك\pi$

$= \frac{٢\pi}{٣} + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

(٧) $\text{جتا}\, س = -\frac{١}{٢}$

$\text{جتا}\, س = \text{جتا}\, \frac{٢\pi}{٣}$

$\therefore$ س تقع في الربع الثاني أو الثالث

$س = \frac{٢\pi}{٣} + ٢ك\pi$

أو $س = -\frac{٢\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$= \frac{٤\pi}{٣} + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

(٨) $\text{ظا}\, س = ١$

$\text{ظا}\, س = \text{ظا}\, \frac{\pi}{٤}$

$س = \frac{\pi}{٤} + ك\pi$ (ك ∈ ص)

(٩) $\text{ظا}\, س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\text{ظا}\, س = \text{ظا}\, \frac{\pi}{٦}$

$س = \frac{\pi}{٦} + ك\pi$ (ك ∈ ص)

(١٠) $\text{جا}\, س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{جا}\, س = \text{جا}\, \frac{\pi}{٣}$

$س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

أو $س = \pi - \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$= \frac{٢\pi}{٣} + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

(١١) $\text{جتا}\, س = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\text{جتا}\, س = \text{جتا}\, \frac{\pi}{٤}$

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

أو $س = -\frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

---

(٥) $\text{جتا}(٢س + \frac{\pi}{٤}) = \text{جتا}(س - \frac{٣\pi}{٤})$

$٢س + \frac{\pi}{٤} = س - \frac{٣\pi}{٤} + ٢ك\pi$ أو $٢س + \frac{\pi}{٤} = -(س - \frac{٣\pi}{٤}) + ٢ك\pi$

$س = -\pi + ٢ك\pi$ أو $٣س = \frac{\pi}{٢} + ٢ك\pi$

$س = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢ك\pi}{٣}$

(٦) $\text{جا}(\frac{\pi}{٦} - س) = \text{جا}(٢س - \frac{٣\pi}{٢})$

$\frac{\pi}{٦} - س = ٢س - \frac{٣\pi}{٢} + ٢ك\pi$ أو $\frac{\pi}{٦} - س = \pi - (٢س - \frac{٣\pi}{٢}) + ٢ك\pi$

$-٣س = -\frac{٥\pi}{٦} + ٢ك\pi$ أو $س = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ك\pi$

$س = \frac{٥\pi}{١٨} - \frac{٢ك\pi}{٣}$

(٧) $\text{جتا}(\frac{\pi}{٨} + س) = ١$ (ع) $٣\pi + ٢س + ٢ك\pi = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore \frac{\pi}{٨} + س = ٠ + ٢ك\pi$ $٢س = -\frac{٥\pi}{٢}$

$س = -\frac{\pi}{٨} + ٢ك\pi$ $س = -\frac{٥\pi}{٨}$

(ك ∈ ص)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{1}{2}$ هي:

جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°)

(جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٢) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

(أ) جتا $\frac{\pi 31}{6}$ جا$\left(-\frac{\pi 35}{3}\right)$

(جـ) ظا $\frac{\pi 17}{6}$ (د) قا $\frac{\pi 13}{3}$

(٣) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة

ظا٢٢٥° - ٣جا٣٠°١٢٣ + ٢جتا(-٩٦٠°) = $-\frac{3}{2}$ (ب)

قتا $\frac{\pi 19}{6}$ - ٢قا $\frac{\pi 13}{6}$ + جا$\left(-\frac{\pi 8}{3}\right)$ - جتا$\left(\frac{\pi 17}{6}\right)$ = ٢ (أ)

ظتا $\frac{\pi 19}{4}$ - ٣ظا$\left(-\frac{\pi 11}{4}\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi 24}{3}\right)$ - ٢جا$\left(\frac{\pi 45}{6}\right)$ = ١ (أ)

قا(-٣١٥°) + ٢قتا٨٥°٥ - ٢جتا٨٥٥° = $\sqrt{2}$ (ب)

(٤) إن قيمة المقدار قا(٢π - θ) - قتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) -١ (ب) صفر

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (ب)

إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$

ذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (ب)

مجموعة حل قا س = ٣,٠ هي ∅ (ب)

ظا (١٥ π) = صفر (أ)

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة (أ) تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$. فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ. حا^{٢}θ + حتا^{٢}θ = ١

ومنه حتا θ = ٠,٩٧ ، ظا θ = ٠,٢٠٦

---

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$، جتاθ < ٠. أوجد جاθ، جتاθ. قا^{٢}θ = ١ + ظا^{٢}θ

ومنه قا θ = -٣ ، حتا θ = $\frac{١}{٣}$ ، حا θ = $-\frac{\sqrt{٨}}{٣}$

---

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$، جاθ < ٠. أوجد جاθ، ظتاθ.. حا^{٢}θ + حتا^{٢}θ = ١

ومنه حا θ = $-\frac{\sqrt{٨}}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{\sqrt{٨}}{٤}$

في التمارين (٤ - ٧)، أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^٢ - ٢جاθ جتاθ. = حا^{٢}θ + حتا^{٢}θ + ٢جاθ حتاθ - ٢جاθ حتاθ = ١

(٥) (ظا^{٢}θ + ١)جتا^{٢}θ. = قا^{٢}θ حتا^{٢}θ = (قا θ حتا θ)^٢ = ١^٢ = ١

(٦) ١ + ظا^٢(-θ) - قا^{٢}θ. = قا^{٢}θ - قا^{٢}θ = ١

(٧) ٩قا^{٢}θ - ٥ظا^{٢}θ - $\frac{٤}{\text{جتا}^٢\theta}$. = ٩قا^{٢}θ - ٩ظا^{٢}θ = ٩(قا^{٢}θ - ظا^{٢}θ) = ٩

في التمارين (٨ - ١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا^٢(-θ) = قتا^{٢}θ.

١ + حتا^٢(-θ) = ١ + (حتا θ)^٢ = ١ + (-ظتا θ)^٢ = ١ + ظتا^{٢}θ = قتا^{٢}θ

(٩) قا^{٤}θ - قا^{٢}θ = ظا^{٤}θ + ظا^{٢}θ. قا^{٤}θ - ظا^{٤}θ = (قا^{٢}θ + ظا^{٢}θ)(قا θ - ظا θ)

∴ قا^{٤}θ - ظا^{٤}θ = قا^{٢}θ + ظا^{٢}θ ∵ قا^{٢}θ - قا θ = ظا^{٢}θ + ظا^{٢}θ

(١٠) (١ - جتا^{٢}θ)(١ + ظتا^{٢}θ) = ١.

الطرف = حا^{٢}θ × قا^{٢}θ = ١ = الطرف

---

(١١) ٣جا$^{٢}\theta$ + ٤جتا$^{٢}\theta$ = ٣ + جتا$^{٢}\theta$.

الايسر = ٣ حا$^{٢}\theta$ + ٣حتا$^{٢}\theta$ + حتا$^{٢}\theta$ = ٣ + حتا$^{٢}\theta$

في التمارين (١٢ - ١٦)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in (0, 2\pi)$ حيث المقام $\neq 0$:

* (١٢) $\frac{\text{جا}^{٣}\theta}{\text{جتا}\theta} = \text{ظا}\theta$ | حا$^{٣}\theta$ = حاθ جتاθ ∴ حاθ (حا$^{٢}\theta$ - جتا$^{٢}\theta$) = ٠ ∴ حاθ (حا$^{٢}\theta$ - (١ - حا$^{٢}\theta$)) = ٠ ∴ حاθ (٢حا$^{٢}\theta$ - ١) = ٠ ∴ حاθ = ٠ أو حاθ = $\frac{١}{٢}$ مرفوض | إذا حاθ = ٠ ∴ θ = ٠ أو π | إذا حاθ = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٦}$

* (١٣) $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\theta} \times \text{قا}\theta = \text{ظا}\theta$ | حاθ (ظاθ - ١) = ٠ ∴ ظاθ = ١ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$

* (١٤) $\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta} = -\text{قتا}\theta$ | ظاθ = -ظتاθ ∴ م ح = -١

(١٥) ٢جتا$^{٢}\theta$ + جتاθ - ١ = ٠ حيث جتاθ > ٠ | $\theta = \frac{\pi}{٣}$ أو $\theta = \frac{-\pi}{٣}$ مرفوض

(٢جتاθ - ١)(جتاθ + ١) = ٠

∴ جتا$\theta = \frac{١}{٢}$ ، جتاθ = -١ مرفوض

(١٦) ظتا$^{٢}\theta$ = ١ | ظتاθ = ±١ | ظاθ = ±١ | $\theta = \frac{\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{-\pi}{٤}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) إذا كانت جتا$\theta = -\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جاθ =

(أ) $\frac{-٧}{٦\sqrt{٢}}$ (ب) $\frac{٦\sqrt{٢}}{٧}$

$\frac{-٦\sqrt{٢}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٦\sqrt{٢}}$

(٢) إذا كانت قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ ، تقع في الربع الرابع. فإن ظاθ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمارين (٣ - ٨)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٣) قتاθ × جتاθ - ظتاθ = ٠ — (ب)

(٤) ظتا^{٢} (-θ) - قتا^{٢} θ = -١ — (ب)

(٥) (قاθ + ظاθ)(قاθ - ظاθ) = ١ — (ب)

(٦) جاθ قتاθ - جتا^{٢} θ - جا^{٢} θ = ٠ — (ب)

(٧) $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{١ - جتا}\theta}$ - جتاθ = -١ — (أ)

(٨) ظاθ + ظتاθ - قاθ قتاθ = ٠ — (ب)

في التمرينين (٩ - ١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

$$\text{حا}\theta\left(\frac{\text{حتا}\theta}{\text{حا}\theta}+\frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}\theta}\right)=\text{حا}\theta\left(\frac{\text{حتا}^{٢}\theta+\text{حا}^{٢}\theta}{\text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta}\right)=\frac{١}{\text{حتا}\theta}\times\frac{\text{حا}\theta}{\text{حا}\theta}=\text{قا}\theta$$

(١٠) $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{\text{١ - ظتا}\theta}$

$$\frac{\text{حا}\theta}{\text{حا}\theta-\text{حتا}\theta}=\frac{\frac{\text{حا}\theta}{\text{حا}\theta}}{\frac{\text{حا}\theta}{\text{حا}\theta}-\frac{\text{حتا}\theta}{\text{حا}\theta}}=\frac{١}{١-\text{حتا}\theta}$$

اختبار الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{1}{3}$. الربع الأول أو الربع الثاني

(ب) قاθ = -١. محور السينات السالب

(ج) ظاθ = -٣. الثاني أو الرابع

(د) جتاθ = $-\frac{7}{8}$. الربع الثاني أو الربع الثالث

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا^{2}θ. $= 1 + ظا^{2}\theta = 1 + 4^{2} = 17$

(ب) ظتاθ. $= \frac{1}{4}$

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. $= ظا\theta = 4$

(د) قتا^{2}θ. $= 1 + ظتا^{2}\theta = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{17}{16}$

(٣) إذا كان جا٣٨° ≃ ٠,٦٢، بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°. $صتا38° = \sqrt{1 - صا^{2}38} = \sqrt{1 - (0,62)^{2}} = 0,78$

(ب) جا(-٥٥٢°). $= -صا\theta = -صتا38 = -0,78$

(جـ) ظا(٥١٤٢°) − جتا(٥٢١٨°) + ظتا(-٥٣٨°). $= -ظا38 + صتا38 - ظتا38$

$= -\frac{0,62}{0,78} + 0,78 - \frac{0,78}{0,62} = -1,27$

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(-٥٦٠°) + ظا(٥٦٠°) − ظتا(٥٢١٠°) + قتا(٥٣٠°) $= -قا60° + ظا60° - ظتا30° + قتا30°$

(ب) جتا$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ + ٢ جا(-π) + جتا(-٨π) + جا$\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$. $= -2 + 1 - 1 + 2 =$ صفر

$= 0 + 2 \times 0 + 1 + 1 = 2$

(٥) أثبت صحة ما يلي:

(أ) $\text{قا}^2\theta - 2\text{ظا}^2\theta + \frac{1}{\text{جتا}^2(-\theta)} = 2$

(ب) $\text{جتا}\theta + \frac{\text{جا}^2\theta}{1 + \text{جتا}\theta} = 1$

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

(أ) $\text{جتا}^4\theta - \text{جا}^4\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta$

(ب) $\text{جتا}\theta\,(\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta) = \text{قتا}\theta$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية: حيث $س < 2\pi$.

(أ) $\text{جتا}س = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ب) $2\,\text{جا}س - \sqrt{3} = 0$

(جـ) $\text{ظا}س = 1$

تمارين إثرائية

(١) تفكير ناقد: افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي، حيث جتاθ = $\frac{-١}{٢}$، جاθ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.
هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = −١٢٠°؟

جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثاني أو الثالث ∴ θ = −١٢٠°
جا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثالث أو الرابع

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا ٢٢٥° − ٢ظا(− ٢٢٥°) + ٣جا ٣٣٠°.

(ب) ظتا ٣٠° + ٢ظا ١٢٠° − ٣ظا ٢١٠° + ٣ظتا(− ٣٣٠°).

(جـ) جتا $\frac{\pi ١٧}{٣}$ + جا$\left(-\frac{\pi ١٥}{٦}\right)$ + ٣جتا$\left(-\frac{\pi ٢٥}{٣}\right)$.

(د) ظا $\frac{\pi ٩}{٤}$ + ظتا $\frac{\pi ١٧}{٤}$ + قا$\left(-\frac{\pi ٥}{٤}\right)$ + قتا $\frac{\pi ١٩}{٤}$.

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°.

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°.

(٤) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$\frac{١ - جاθ}{جتاθ} + \frac{جتاθ}{١ - جاθ} = ٢قاθ$

الأيسر = $\frac{(١-جاθ)^٢ + جتا^٢θ}{جتاθ(١-جاθ)} = \frac{١ - ٢جاθ + جا^٢θ + جتا^٢θ}{جتاθ(١-جاθ)}$

$= \frac{٢(١-جاθ)}{جتاθ(١-جاθ)} = ٢قاθ$ = الأيمن

تمرين (٣) صـ ٨٤

(أ) المقدار = $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 x \, dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

(ب) المقدار = $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^3 x \, dx - \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \, dx + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x \, dx$

$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x \cos x \, dx - \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \, dx + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x \, dx$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$

(ج) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos x \, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos x \, dx + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos x \, dx$

$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos x \, dx + \int_{\pi/3}^{4\pi/3} \cos x \, dx$

$= \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$

تمرين (٤) صـ ٨٤

(أ) المقدار = $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \sin^2 x \, dx$

$= \int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \sin^2 x \, dx$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

(ب) المقدار = $\int_{0}^{\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{4\pi}^{5\pi} \cos^2 x \, dx$

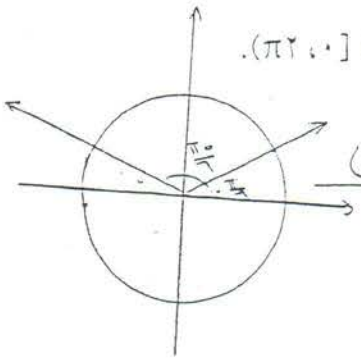
$= \int_{0}^{\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \cos^2 x \, dx + \int_{4\pi}^{5\pi} \cos^2 x \, dx$

$= \int_{0}^{\pi} \cos^2 x \, dx$

$= \frac{\pi}{2}$

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثم مثّلها على دائرة الوحدة، حيث $\theta \in [0, 2\pi)$.

$٢ جا^٢ \theta = ٤ - ٧ جا \theta$.



$(٢ جا\theta - ١)(جا\theta + ٤) = ٠$

$٢ جا^٢ \theta + ٧ جا \theta - ٤ = ٠$

$جا\theta = \frac{١}{٢}$ ، $جا\theta = -٤$ مرفوض

$\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٦}$

في التمرينين (٦-٧)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٦) $\frac{جا\theta + جتا\theta}{جتا\theta} - \frac{جا\theta - جتا\theta}{جا\theta} = قا\theta \, ظتا\theta$

الطرف $= \frac{جا^٢\theta + جا\theta جتا\theta - جا\theta جتا\theta + جتا^٢\theta}{جتا\theta جا\theta} = \frac{١}{جتا\theta جا\theta} = قا\theta \, ظتا\theta$

(٧) $\frac{جتا^٢\theta - جا^٢\theta}{١ - ظا^٢\theta} = جتا^٢\theta$

الطرف $= \frac{جتا^٢\theta - جا^٢\theta}{١ - \frac{جا^٢\theta}{جتا^٢\theta}} = \frac{جتا^٢\theta (جتا^٢\theta - جا^٢\theta)}{(جتا^٢\theta - جا^٢\theta)} = جتا^٢\theta$

في التمرينين (٨-٩)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٨) $ظتا^٢ س + ظتا س = ٠$

(٩) $قا^٢ س = ٣ قا س - ٢$

رقم (٨)

$ظتا س (ظتا س + ١) = ٠$

$ظتا س = ٠$ أو $ظتا س = -١$

$ظا س = -١$

$س = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ل$ أو $س = \frac{٣\pi}{٢}$

$س = \frac{٣\pi}{٤} + \pi ل$ أو $س = \frac{-\pi}{٤} + \pi ل$

رقم (٩)

$قا^٢ س - ٣ قا س + ٢ = ٠$

$(قا س - ١)(قا س - ٢) = ٠$

$قا س = ١$ أو $قا س = ٢$

$جتا س = ١$ أو $جتا س = \frac{١}{٢}$

$س = ٢\pi ل$ أو $س = \frac{\pi}{٣} + ٢\pi ل$

$س = \frac{٥\pi}{٣} + ٢\pi ل$

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

المجموعة الأولى: أساسية

في التمارين (١ - ٤)، أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(١) (٧، -٣) (-٢، ٩)

(٢) (-٢، ٧) (-٢، -٧)

(٣) (٠، ٠)(٦، -٨)

(٤) (-٤، -٤) (٤، ٤)

في التمرينين (٥- ٦)، أوجد محيط كل شكل من الأشكال التالية. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥)

(٦)

في التمارين (٧- ١٠)، أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة التالية، بمعلومية إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة.

(٧) أ(٢، ٥)، ب(٠، ٧)

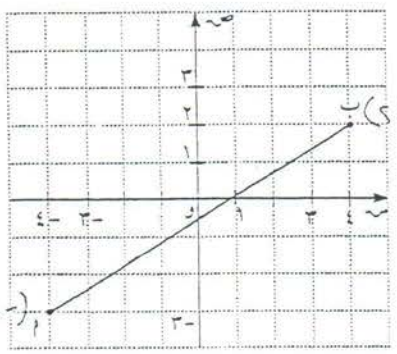
(٨) س(-٣، ١٤)، ص(١، ١٠)

(٩) م(٤، ١)، ن(-٤، -١)

(١٠) ك(٥، ٣)، ل(-٩، ٣)

(١١) $\overline{أب}$ يمثل قطر دائرة، إحداثيا أ(-١، ٨) وإحداثيا ب(-٧، ٠)، أوجد إحداثيي مركز الدائرة.

(١٢) أوجد طول $\overline{أب}$ مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



في التمرينين (١٣ - ١٤)، أوجد أطوال أضلاع كل من المثلثات التالية بمعلومية إحداثيات رؤوسها. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة. $\overline{أب} = \sqrt{(-٦-٢)^٢ + (٣-٢)^٢} = \sqrt{٦٤ + ١} = ١٠٫٣$ ، $\overline{ب جـ} = \sqrt{(٦-٥)^٢ + (٢-٦)^٢}$

(١٣) أ(٢، ٢)، ب(٦، ٣)، جـ(٥، ٦) $\overline{أجـ} = \sqrt{(٥-٢)^٢ + (٦-٢)^٢} = ٥$

(١٤) م(-١، -٥)، ن(٤، -٤)، ك(٢، -١) $\overline{مك} = \sqrt{(٢+١)^٢ + (-١+٥)^٢} = ٥٫١$

$\overline{نك} = \sqrt{(٢-٤)^٢ + (-١+٤)^٢} = ٣٫٦$ ، $\overline{مك} = \sqrt{(٢+١)^٢ + (-١+٥)^٢} = ٥$

(١٥) يقع منزل فيصل ٤ شرق ٢ شمال، ويقع نادي الرماية الذي ينتسب إليه فيصل ٢ غرب ٣ جنوب.

(أ) عيّن على المستوى الإحداثي موقع منزل فيصل وموقع نادي الرماية.

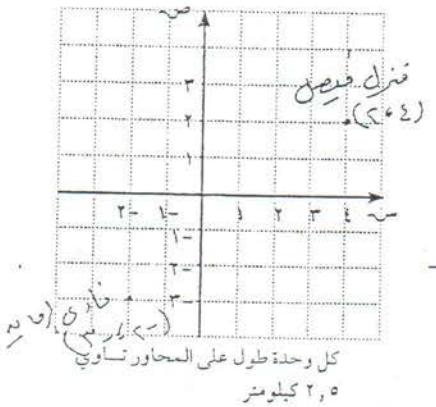
(ب) أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين النادي ومنزل فيصل.

نقطة المنتصف $= \left(\frac{٤-٢}{٢}، \frac{٢-٣}{٢}\right) = \left(١، \frac{-١}{٢}\right)$

(جـ) أوجد المسافة بين منزل فيصل والنادي.

المسافة $= \sqrt{(٤+٢)^٢ + (٢+٣)^٢} = ٨٫٧ \times ٢٫٥$ كيلومتر

$= ١٩٫٥$ كيلومتر



(١٦) تفكير ناقد. إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف قطعة مستقيمة، فما هي الصفة التي سوف تتمتع بها إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة؟

إحداثيات إحدى النقطتين هي معكوس جمعي للأخرى

مثال (-٢، ٥)، (٢، -٥)

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-٢+٢}{٢}، \frac{٥-٥}{٢}\right) = (٠، ٠)$

(١٧) (أ) ما المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٣، ٤)؟ $\overline{أب} = \sqrt{(٣-٠)^٢ + (٤-٠)^٢} = ٥$

(ب) أوجد ثلاث نقاط أخرى تكون على المسافة نفسها من نقطة الأصل.

(٣، -٤)، (-٣، ٤)، (-٤، -٣)

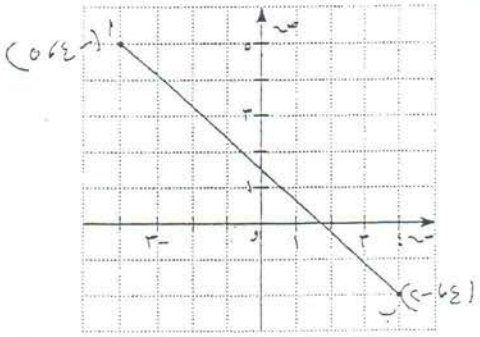
المجموعات تعاون تعزيز تنمية

في التمارين (١ - ٥)، اختر من القائمة الأولى ما يناسب في القائمة الثانية لتحصل على عبارة صحيحة.

القائمة الأولى	القائمة الثانية
المسافة بين النقطتين بالوحدات الطولية	(أ) ٢
(١) (٣، ٠)، (٠، ٤) هي: (د)	(ب) ٣
(٢) (-٢، ٠)، (-٢، ٤) هي: (جـ)	(جـ) ٤
(٣) (٣، -٦)، (٥، -٦) هي: (أ)	(د) ٥

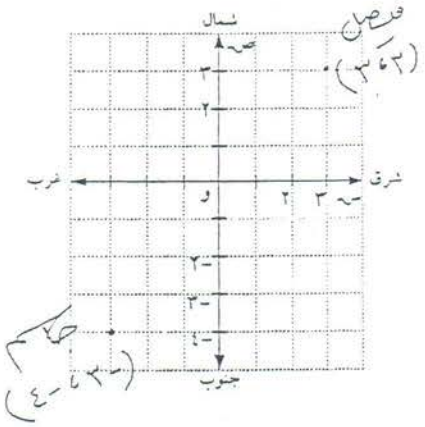
القائمة الأولى	القائمة الثانية
في نقطة المتصف لـ $\overline{أب}$ حيث	(أ) $(٥، ٥\frac{١}{٢})$
(٤) أ(١٢، -٢)، ب(-٢، -٩) هي: ج	(ب) $(٥، -٥\frac{١}{٢})$
(٥) أ(١٢، ٠)، ب(٢، ١١) هي: ب	(جـ) $(٧، ٥\frac{١}{٢})$
	(د) $(٧، -٥\frac{١}{٢})$

(٦) في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{أب}$ مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



$أب = \sqrt{(٤+٤)^٢ + (-٢-٥)^٢} = ١٠٫٦$

(٧) (أ) حدد بيانيًا مواقع كل من فيصل وجاسم على شبكة إحداثيات باعتبار أن المحطة الفرعية هي نقطة الأصل و.

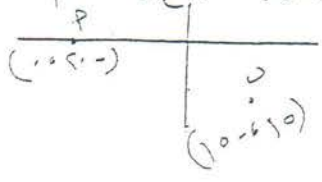


(ب) أوجد إحداثيي النقطة حيث سيلتقيان. تعطيها المتصف $= \left(\frac{٣-٣}{٢}، \frac{٤-٣}{٢}\right) = (٠، -\frac{١}{٢})$

* (جـ) حدد مكان الالتقاء بالكيلومترات شمالًا أو جنوبًا، شرقًا أو غربًا بالنسبة إلى المحطة الفرعية.

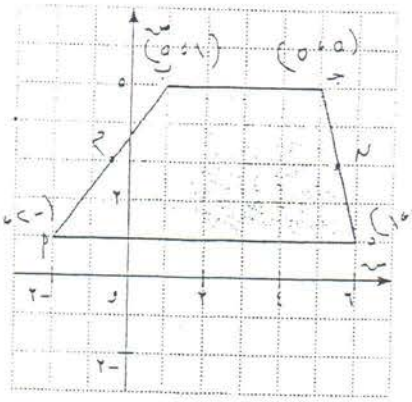
تكاسر الالتقاء على بعد $\frac{١}{٢}$ كيلومتر جنوب المحطة الفرعية

* (٨) لتغطية أحد التجمعات الرياضية من الجو، حلقت طوافتان تابعتان لمحطتي تلفزة على الارتفاع نفسه. بحيث موقع الطوافة أ على بعد ٢٠ كم غرب التجمع وموقع الطوافة ب على بعد ١٥ كم جنوب التجمع و١٥ كم شرق التجمع. أوجد المسافة بين الطوافتين حيث نقطة التجمع تمثل نقطة الأصل.



$أب = \sqrt{(١٥+٢٠)^٢ + (-١٥-٠)^٢} = ١٠٫٣٨$ كم

(٩) هندسة: في الشكل المقابل، أ ب جـ د شبه منحرف.



(أ) أوجد إحداثيات نقاط المنتصف لكل من $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ بحيث تكون على الترتيب م، ن.

م = $\left(\frac{-١+٥}{٢}، \frac{٦+٥}{٢}\right)$ = $(٢، ٥٫٥)$

ن = $\left(\frac{٥+٥}{٢}، \frac{١+٥}{٢}\right)$ = $(٥، ٣)$

(ب) أوجد طول $\overline{م ن}$ وطول $\overline{ب جـ}$ وطول $\overline{أ د}$. ثم قارن بين طول $\overline{م ن}$ و المتوسط الحسابي لطولي $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ د}$.

م ن = $|٥ - ٥| + (٥٫٥ - ١)^٢$ = ٦

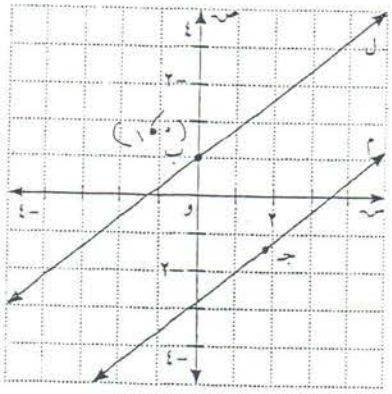
ب جـ = $|٥ - ١١| = ٤$ ، د أ = $|٦ + ٢| = ٨$

المتوسط الحسابي لطولي ب جـ، د أ = $\frac{٤+٨}{٢}$ = ٦ = م ن

(١٠) $\overline{هـ د}$ قطر لدائرة بحيث إحداثيي هـ (س - ٣، ص + ٢) وإحداثيي د(س + ٣، ص - ٢). أوجد إحداثيي مركز الدائرة.

مركز الدائرة = $\left(\frac{س - ٣ + س + ٣}{٢}، \frac{ص + ٢ + ص - ٢}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٢س}{٢}، \frac{٢ص}{٢}\right)$ = (س، ص)



* (١١) استخدم الخطوات التالية لإيجاد المسافة بين الخطين المتوازين ل، م كما هو مبيّن في الرسم البياني المقابل.

(أ) معادلة الخط المستقيم ل هي: ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ١؛

معادلة الخط المستقيم م هي: ص = $\frac{٣}{٤}$ س - $\frac{١١}{٤}$.

أوجد معادلة الخط المستقيم ن المتعامد مع الخط المستقيم ل في النقطة ب.

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ١

م = $\frac{٣}{٤}$

ميل العمودي = $-\frac{٤}{٣}$ ∴ ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ب

٠ = ١ - $\frac{٤}{٣}$ × ٠ = ١ ∴ معادلة ن هي ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ١

(ب) استخدم معادلتي الخطين المستقيمين م، ن لإيجاد إحداثيي نقطة التقاطع جـ.

ص = $\frac{٣}{٤}$ س - $\frac{١١}{٤}$ ⇐ ص - $\frac{٣}{٤}$ س = $-\frac{١١}{٤}$

ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ١ ⇐ - ص + $\frac{٤}{٣}$ س = ١

$-\frac{٢٥}{١٢}$ س = $-\frac{١٥}{٤}$

س = ١٫٨

∴ ص = -١٫٤

∴ جـ (١٫٨، -١٫٤)

(جـ) أوجد المسافة بين ب، جـ.

ب جـ = $\sqrt{(١٫٨ - ٠)^٢ + (-١٫٤ - ١)^٢}$ = ٣

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing line Segment

المجموعة الأولى أسئلة أساسية

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٧، ٥)، ب(٨، -٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

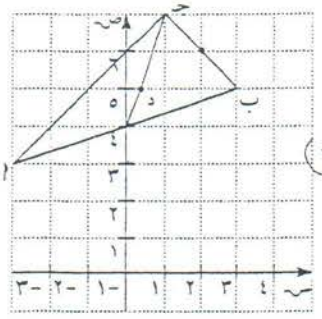
(ب) أ(٦، ٩)، ب(-٢، ١) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٢) أوجد إحداثيي النقطة م التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٢، ٥)، ب(٤، ٢) ونسبة التقسيم ٢ : ٥.

(ب) أ(١، ٨)، ب(-٥، ٣) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٣) أ ب جـ مثلث فيه: أ(-٣، ٣)، ب (٣، ٥)، جـ (١، ٧) أوجد:

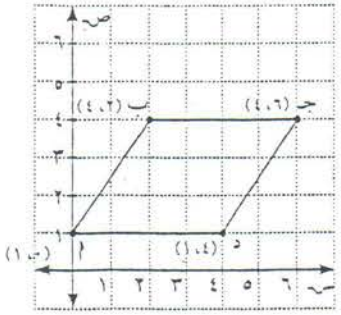


(أ) إحداثيات منتصفات أضلاع المثلث. منتصف $\overline{جـ أ}$ = $\left(\frac{-٣+١}{٢}، \frac{٣+٧}{٢}\right)$ = $\left(\frac{-٢}{٢}، \frac{١٠}{٢}\right)$ = (-١، ٥)

(ب) إحداثيا نقطة تقاطع متوسطاته. منتصف $\overline{ب جـ}$ = $\left(\frac{٣+١}{٢}، \frac{٥+٧}{٢}\right)$ = (٢، ٦)

منتصف $\overline{أ جـ}$ = $\left(\frac{-٣+١}{٢}، \frac{٣+٧}{٢}\right)$ = $\left(\frac{-٢}{٢}، \frac{١٠}{٢}\right)$ = (-١، ٥)

(٤) أ، ب، جـ، د أربع نقاط على الشكل التالي: أ(٠، ١)، ب (٢، ٤)، جـ (٦، ٤)، د (٤، ١).



(أ) أثبت أنّ أ ب جـ د متوازي الأضلاع.

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ن، حيث ن نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

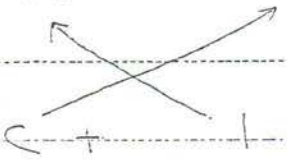
ن = منتصف $\overline{أ جـ}$ = $\left(\frac{٦+٢}{٢}، \frac{٤+١}{٢}\right)$ = (٤، ٢٫٥)

* (جـ) أوجد إحداثيات النقاط س، ص، ع، ل. حيث س، ص، ع، ل متوازي أضلاع له المركز نفسه «ن» وأطوال أضلاعه تساوي $\frac{١}{٢}$ أطوال أضلاع متوازي الأضلاع أ ب جـ د، حيث س، ص، ع، ل تنتمي لقطري متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

رسم ① هـ : ٩٠ (أ)

$س = \frac{١ \times ٨ + ٢ \times -٧}{١ + ٣} = -٢$

$ص = \frac{١ \times -٥ + ٢ \times ٥}{١ + ٢} = \frac{٥}{٣}$

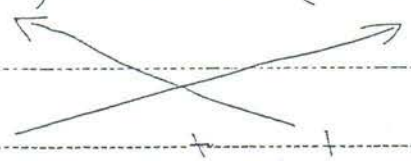


∴ نقطة التقسيم هى $ن = (-٢ ، \frac{٥}{٣})$

رسم ① هـ : ٩٠ (ب)

$س = \frac{١ \times -٢ + ٣ \times ٩}{١ + ٣} = ٤$

$ص = \frac{١ \times ١ + ٣ \times ٩}{١ + ٣} = ٧$ ∴ نقطة التقسيم هى $ن = (٤ ، ٧)$

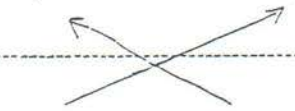


رسم [٢] هـ : ٩٠

(أ)

$س = \frac{٢ \times ٤ - ٥ \times -٢}{٥ - ٢} = ٦$

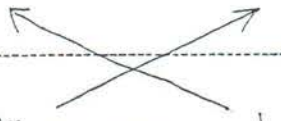
$ص = \frac{٢ \times ٢ - ٥ \times ٥}{٥ - ٢} = -٧$ نقطة التقسيم هى م $(٦ ، -٧)$



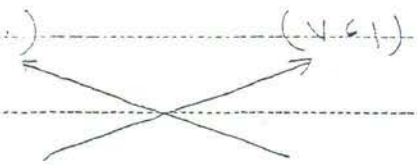
(ب)

$س = \frac{١ \times ٣ - ٥ \times -١}{١ - ٣} = -٤$

$ص = \frac{١ \times ٨ - ٣ \times ٣}{١ - ٣} = \frac{٢١}{٢}$ ∴ نقطة التقسيم م $(-٤ ، \frac{٢١}{٢})$



رقم [٣] ⓑ ص = ٩٠



احداثى نقطة تقاطع متوسطات Δ ب ء

$$س = \frac{٢ \times ٠ + ١ \times ١ + ٢}{١ + ٢} = \frac{١}{٣}$$

$$ص = \frac{٢ \times ٤ + ١ \times ٧ + ٢}{١ + ٢} = ٥$$

النقطة هى $(\frac{١}{٣} ، ٥)$

رقم [٤] ⓐ ص ⊥ ٩٠

$$\text{ميل } \overline{أب} = \frac{٤ - ١}{٠ - ٢} = \frac{٣}{-٢}$$

$$\text{ميل } \overline{ب ء} = \frac{١ - ١}{٤ - ٠} = ٠$$

$$\text{ميل } \overline{ء د} = \frac{٤ - ٠}{٦ - ٠} = \frac{٤}{٦}$$

$$\text{ميل } \overline{د أ} = \frac{٤ - ١}{٤ - ٦} = \frac{٣}{-٢}$$

∵ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{د ء}$

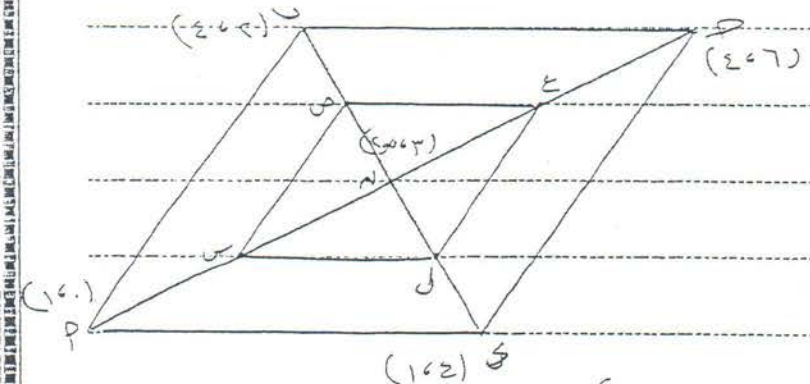
∴ $\overline{ب ء} \parallel \overline{د ء}$

∵ ميل $\overline{ء د}$ = ميل $\overline{ب ء}$

∴ $\overline{ء د} \parallel \overline{ب ء}$

∴ أ ب ء د متوازى أضلاع

رقم [٤] ⓑ



$$س = \left(\frac{٠ + ٣}{٢} ، \frac{١ + ٥٫٢}{٢}\right)$$

$$= (١٫٥ ، ٣٫٦)$$

$$\text{، } ص = \left(\frac{٣ + ٢}{٢} ، \frac{٥٫٢ + ٤}{٢}\right)$$

$$= (٢٫٥ ، ٤٫٦ ، ٣٫٥)$$

$$\text{، } ع = \left(\frac{٦ + ٣}{٢} ، \frac{٤ + ٥٫٢}{٢}\right) = (٤٫٥ ، ٤٫٦ ، ٣٫٥)$$

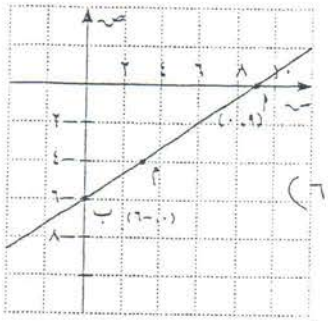
$$\text{، } ل = \left(\frac{٤ + ٣}{٢} ، \frac{١ + ص٢}{٢}\right) = (ص٣ ، ٣٫٧٥ ، ١)$$

المجموعة الثالثة من تمارين تعزيزية

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٦، ٤)، ب(٣، -٢) ونسبة التقسيم ١ : ٢

(ب) أ(١٠، ١٥)، ب(٦، ١٠) ونسبة التقسيم ١ : ٥



(٢) المستقيم الموضح بالشكل يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين أ، ب على الترتيب. أوجد إحداثيي م التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٢:١.

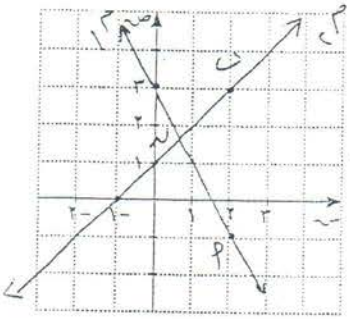
أ (٠، ٩) ب (٠، -٦)

١ + ٢

$س = \frac{٢ \times ٠ + ١ \times ٩}{١ + ٢} = ٣$

$ص = \frac{٢ \times ٩ + ١ \times (-٦)}{١ + ٢} = ٤-$

∴ م = (٣، -٤)



(٣) مستقيم $م_١$: ٢س + ص - ٣ = ٠، ومستقيم $م_٢$: س - ص + ١ = ٠.

(أ) ارسم المستقيمين $م_١$، $م_٢$.

س	٠	١
ص	٣	١

،

س	١-	٠
ص	٠	١

(ب) أثبت أن أ(٢، -١) تقع على المستقيم $م_١$، ب(٢، ٣) تقع على المستقيم $م_٢$.

$٢ \times ٢ + (-١) - ٣ = ٠$

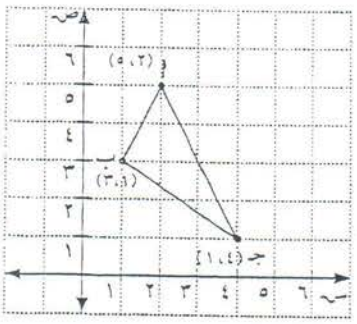
∴ (٢، -١) تقع على المستقيم $م_١$

$٢ - ٣ + ١ = ٠$

∴ (٢، ٣) تقع على المستقيم $م_٢$

(جـ) أوجد إحداثيات النقطتين أ، ب التي تقسم ن أ، ن ب على الترتيب من الداخل من جهة ن بنسبة ١ : ٢ حيث ن $\left(\frac{٢}{٣}، \frac{٥}{٣}\right)$ نقطة تلاقي المستقيمين $م_١$، $م_٢$.

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).



(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

ب (١، ٣) أ (٢، ٥)

٣ + ١

$س = \frac{١ \times ١ + ٣ \times ٢}{٣ + ١} = ١٫٧٥$

$ص = \frac{١ \times ٣ + ٣ \times ٥}{٣ + ١} = ٥٫٤$

(ب) أوجد إحداثيي النقطة م التي تقسم $\overline{أجـ}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٤.

جـ (٤، ١) أ (٢، ٥)

٤ + ١

$س = \frac{١ \times ٤ + ٤ \times ٢}{٤ + ١} = ٢٫٤$

$ص = \frac{١ \times ٤ + ٤ \times ٥}{٤ + ١} = ٤٫٢$

(جـ) أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم $\overline{بجـ}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

ب (١، ٣) جـ (٤، ١)

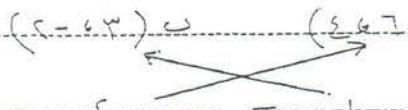
٢ + ١

$س = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{٢ + ١} = ٢$

$ص = \frac{١ \times ١ + ٢ \times ٣}{٢ + ١} = \frac{٧}{٣}$

رقم [1] ص ٩١

(أ)

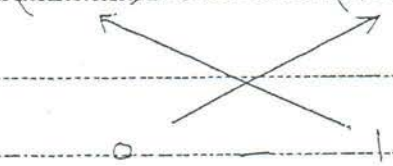


$$س = \frac{١ \times ٢ - ٢ \times ٦-}{٢-١} = \frac{١٥}{-} =$$

$$ص = \frac{١ \times ٢- - ٢ \times ٤}{٢-١} = ١٠$$

نقطة التقسيم هي ن = (١٠٦١٥-)

(ب)

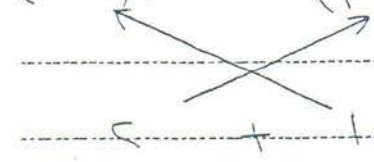


$$س = \frac{١ \times ٦ - ٥ \times ١٠}{٥-١} = ١١$$

$$ص = \frac{١ \times ١٠ - ٥ \times ١٥}{٥-١} = ١٦٫٢٥$$

نقطة التقسيم هي ن = (١١ ، ١٦٫٢٥)

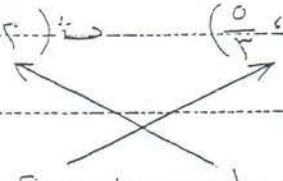
رقم (٣) ص ٩١



$$س = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times ٤/٣}{٢+١} = \frac{١٠}{٩}$$

$$ص = \frac{١ \times ١- + ٢ \times ٥/٣}{٢+١} = \frac{٧}{٩}$$

نقطة التقسيم هي أ' = (١٠/٩ ، ٧/٩)



$$س = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times ٤/٣}{٢+١} = \frac{١٠}{٩}$$

$$ص = \frac{١ \times ٣ + ٢ \times ٥/٣}{٢+١} = \frac{١٩}{٩}$$

نقطة التقسيم هي د' = (١٠/٩ ، ١٩/٩)

تمرّن
٣-٩
(٢)

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

ميل الخط المستقيم
Slope of a Straight Line

المجموعة الأولى: تمارين أساسية

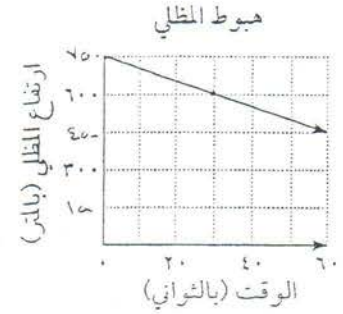
(١) إن نسبة التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتة. أوجد نسبة التغير، وفسّر ماذا تعني كل نسبة تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (مئوية)
١	١٩-
٤	١٤-
٧	٩-
١٠	٤-
١٣	١

معدل التغير = $\frac{-١٤ - (-١٩)}{٤ - ١} = \frac{٥}{٣}$

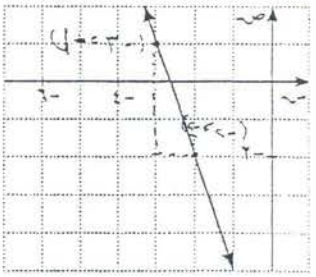
(ب)



معدل التغير = $\frac{٦٠٠ - ٧٥٠}{٣٠ - ٠} = -٥$

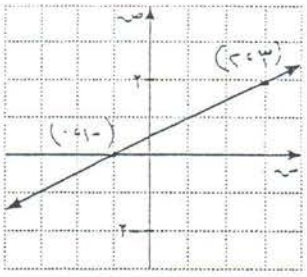
في التمرينين (٢ - ٣)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:

(٢)



$م = \frac{-٢ - ٤}{٢ - (-٣)} = \frac{-٦}{٥}$

(٣)



$م = \frac{٢ - ٠}{٣ - (-١)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

في التمرينين (٤ - ٥)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٤) (٣، ٢)، (٥، ٦) $م = \frac{٦ - ٢}{٥ - ٣} = \frac{٤}{٢} = ٢$

(٥) (٦، ٥)، (٢، ٣) $م = \frac{٣ - ٥}{٢ - ٦} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

(٦) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

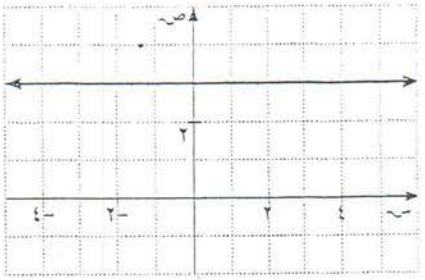
$م = ظا ٦٠° = \sqrt{٣}$

(٧) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: $س = ص + ٧$.

$م_١ = ظا ٤٥° = ١$ ∴ $م_٢ = ١$

في التمارين، (٨ - ١٠)، حدّد ما إذا كان ميل المستقيم يساوي صفرًا أم هو غير معرّف.

(٨)



الميل = صفر

(٩) (٣، ٤)، (-٣، ٤) الميل = صفر (١٠) (٤، ٣)، (٤، -٣) الميل غير معرف

في التمرينين (١١ - ١٢)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

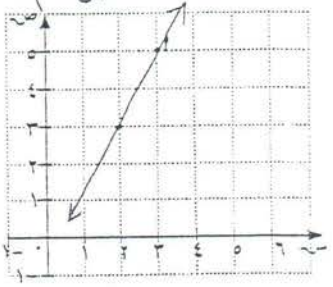
(١١) يبلغ طول الرضيع ٤٥ سم بعد شهر من الولادة و٦٩ سم عندما يبلغ شهره العاشر. نسبة التغير = $\frac{٤٥ - ٦٩}{١ - ١٠}$ = ٢٫٦٦

(١٢) بلغ ثمن ٤ تذاكر للسينما ١٠ دنانير و١٠ تذاكر ١٩ دينارًا.

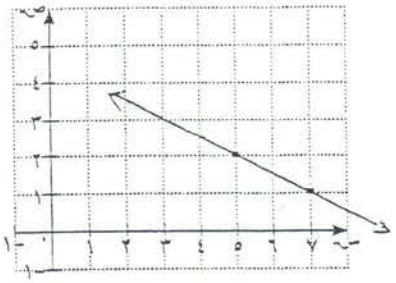
(٤، ١٠) ، (١٩، ١٠) نسبة التغير = $\frac{١٠ - ١٩}{٤ - ١٠}$ = ١٫٥

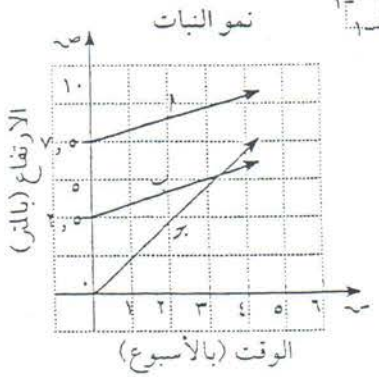
في التمرينين(١٣ - ١٤)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالتالي:

(١٣) أ(٣، ٥)، الميل = $\frac{٢}{١}$ تتحرك ٢ وحدة رأسيا للأعلى ١ وحدة أفقيا لليمين أو ٢ وحدة رأسيا للأسفل ١ وحدة أفقيا لليسار



(١٤) ب(٥، ٢)، الميل = $\frac{-١}{٢}$ تتحرك ١ وحدة رأسيا للأسفل ٢ وحدة أفقيا لليمين





* (١٥) علوم: (أ) أي المستقيمات في الرسم المقابل له الميل الأكثر ارتفاعًا؟ ب

(ب) أي النباتات لها نسبة التغير الأكبر على مدى ستة أسابيع؟ وأيها لها نسبة التغير الأصغر؟ كيف تتأكد من ذلك؟

نسبة التغير الأكبر

نسبة التغير الأصغر هو ٠٫٥ وهما متوازيان متعرجان

(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{٣}{٤}$. ويمر بنقطة الأصل.

ص = $\frac{٣}{٤}$ س

النقطتان هما (٤، ٣) ، (٨، ٦)

في التمارين (١٧ – ١٩)، أوجد قيمة كل من س، ص إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

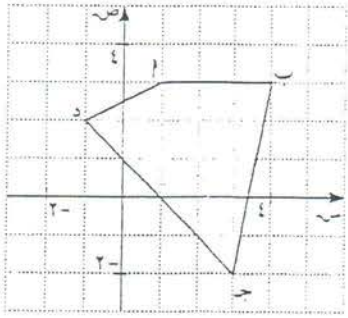
(١٧) (س، ٣)، (٢، ٨)، الميل = $\frac{-٥}{٢}$. $\frac{٨-٣}{٢-س} = \frac{-٥}{٢}$ ، س = ٤

(١٨) (-٤، ص)، (٢، ٤ص)، الميل = ٦. $\frac{٤ص-ص}{٢+٤} = \frac{٦}{١}$ ، ص = ١٢

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرّف. $\frac{٥-٢}{٣-س}$ غير معرف

س = ٣

(٢٠) هندسة: أوجد ميل كل ضلع في الشكل المقابل.



ميل $\overline{أب}$ = صفر، ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٥}{٤}$ ، ميل $\overline{جـد}$ = -١ ، ميل $\overline{دأ}$ = $\frac{١}{٢}$

في التمارين (٢١ – ٢٤) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (ب)

(٢٢) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائمًا سالب. (ب)

(٢٣) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفرًا بنقطة الأصل. (أ)

(٢٤) نقطتين لديهما الإحداثي السيني نفسه، تنتميان إلى المستقيم العمودي (الرأسي) نفسه. (ب)

(٢٥) تحليل الخطأ: وجد سالم أن ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١، ٧)، (٣، ٩) يساوي: $\frac{١-٣}{٧-٩}$. ما هو خطأ سالم؟ خطأ سالم أنه قسم الفرق الأفقي على الفرق الرأسي ، الإجابة الصحيحة هي الميل = $\frac{٧-٩}{١-٣}$

(٢٦) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س، -ص)، (-س، -ص).

الميل = $\frac{-ص+ص}{س+س} = \frac{٠}{٢س} = ٠$

في التمرينين (٢٧ – ٢٨)، حدّد إن كانت مجموعة النقاط التالية تقع على استقامة واحدة.

(٢٧) أ(١، ٣)، ب(٤، ٢)، جـ(-٢، ٤). ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٣-٢}{١-٤} = \frac{١}{٣}-$

ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٢-٤}{٤-(-٢)} = \frac{-١}{٦}$ ∴ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{بجـ}$

∴ النقاط أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة

(٢٨) أ(-٢، ٣)، ب(٠، -١)، جـ(٢، ١).

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{-١-٣}{٠-(-٢)}$ = -٢ ، ميل $\overline{ب جـ}$ = $\frac{١+١}{٢-٠}$ = ١ ∴ ميل $\overline{أب}$ ≠ ميل $\overline{ب جـ}$

∴ النقاط أ، ب، جـ ليست على استقامة واحدة

(٢٩) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (-١، $\overset{أ}{-١}$)، ($\overset{ب}{-٤}$، ٥) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين ($\overset{جـ}{٠}$، ١)، (٤، $\overset{د}{٣}$).

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{١+٥}{-٤+١}$ = -٢ ، ميل $\overline{جـ د}$ = $\frac{١-٣}{٠-٤}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ -٢ × $\frac{١}{٢}$ = -١ ∴ المستقيمان متعامدان

المجموعة ٦ تمارين تعزيزية

(١) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٤، -٣)، ب(١، -٥) مستخدمًا أ(س٢، ص٢)، ب (س١، ص١).

م = $\frac{-٣+٥}{٤-١}$ = $\frac{٢}{٣}$

(ب) أوجد ميل المستقيم في (أ) مستخدمًا أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢).

ص = $\frac{-٥+٣}{١-٤}$ = $\frac{٢}{٣}$

(جـ) ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن الناتج تقريبًا لا تغير

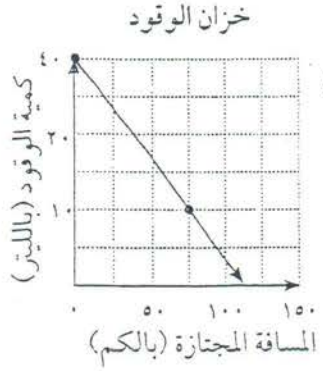
(٢) إذا كانت نسبة التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتة. أوجد نسبة التغير وفسّر ماذا تعني كل نسبة تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

عدد الأشخاص	سعر الوجبة (بالدينار)
٢	٤
٣	٦
٤	٨
٥	١٠
٦	١٢

نسبة التغير = $\frac{٦-٤}{٣-٢}$ = $\frac{٢}{١}$

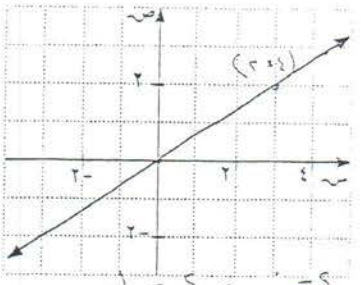
(ب)



نسبة التغير = $\frac{١٠-٤}{٠-٧٥}$ = -$\frac{٢}{٥}$

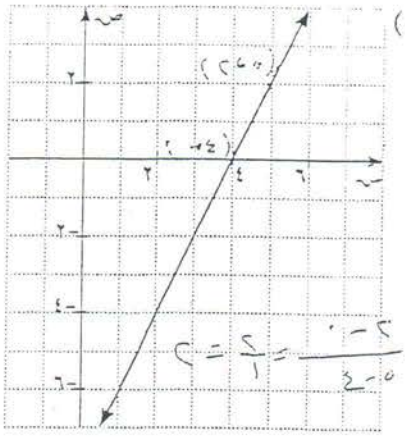
في التمرينين (٣-٤)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:

(٣)



الميل = $\frac{٢-٠}{٤-٠} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٤)



الميل = $\frac{٢-٠}{٥-٤} = \frac{٢}{١} = ٢$

في التمرينين (٥ – ٦)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٥) (-٤، ٤)، (٢، -٥) م = $\frac{٥+٤}{-٤-٢} = \frac{٣}{-٦}$

(٦) (-٢، ١)، (١، -٢) م = $\frac{-٢-١}{١+٢} = \frac{-٣}{٣} = -١$

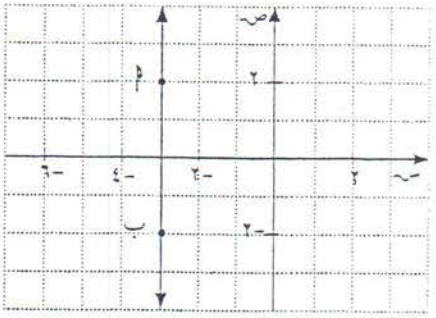
(٧) أوجد ميل مستقيم موازٍ لمحور السينات. ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر

* (٨) أوجد ميل مستقيم يصنع مع محور الصادات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بنقطة الأصل. ∴ م = ظا ٤٥° = ١

∴ المستقيم يصنع مع محور الصادات زاوية قياسها ٤٥° أو زاوية قياسها ١٣٥° ∴ م = ظا ١٣٥° = -١

في التمارين (٩ – ١١)، حدِّد ما إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي صفرًا أم هو غير معرّف.

(٩)



غير معرف

(١٠) أ$(-٥، \frac{١}{٢})$، ب (-٥، ٣) غير معرف

(١١) أ(-٥، ١)، ب (-٤، ١) الميل = صفر

في التمرينين (١٢ – ١٣)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

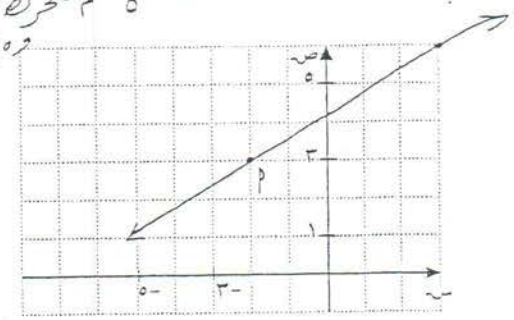
(١٢) تقود السيارة مسافة ٥٠ كيلومترًا في الساعة و٢٠٠ كيلومتر في ٤ ساعات. نسبة التغير = $\frac{٢٠٠-٥٠}{٤-١} = \frac{٥٠}{١}$

(١٣) تقرأ ٤ صفحات في ١٠ دقائق و٨ صفحات في ١٨ دقيقة.

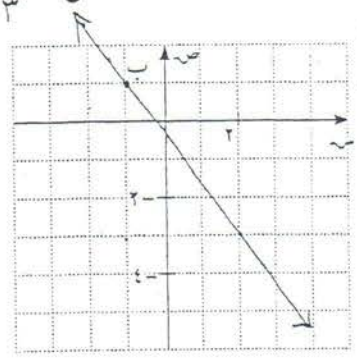
نسبة التغير = $\frac{٨-٤}{١٨-١٠} = \frac{١}{٢}$

في التمرينين (١٤ - ١٥)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالتالي:

(١٤) أ(-٢، ٣)، الميل = $\frac{٣}{٥}$



(١٥) ب(-١، ١)، الميل = $\frac{-٤}{٣}$



(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{-١}{٢}$، ويمر بنقطة الأصل.

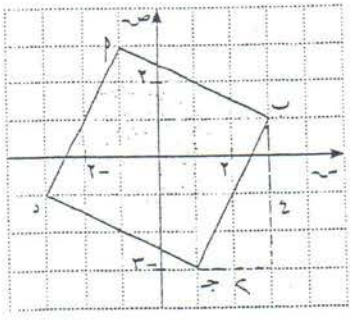
في التمارين (١٧ - ١٩)، أوجد قيمة س إذا مرت النقطتان بالمستقيم المعطى ميله.

(١٧) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = -٢.

(١٨) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = $\frac{-١}{٢}$.

(١٩) (٤، ٣)، (س، ٧)، الميل = ٢.

(٢٠) هندسة: في الشكل المقابل أوجد ميل كل ضلع.



ميل $\overline{أب}$ = $\frac{-١}{٢}$

ميل $\overline{ب جـ}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ميل $\overline{جـ د}$ = $\frac{-١}{٢}$

ميل $\overline{د أ}$ = ٢

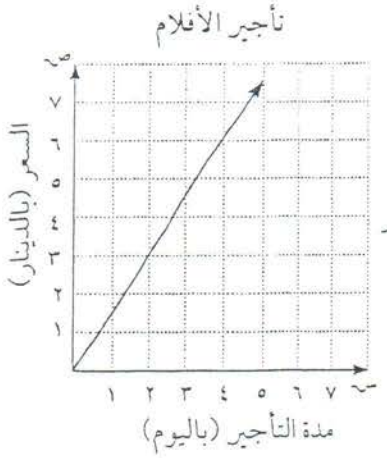
في التمارين (٢١ - ٢٣)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) إن نسبة التغير دائمًا موجبة أو تساوي صفر.

(٢٢) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه.

(٢٣) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائمًا يمر بنقطة الأصل.

(٢٤) يمثل الشكل المقابل رسم تأجير الأفلام نسبة إلى مدة التأجير.



(أ) قدّر ميل المستقيم. ماذا يمثل هذا العدد؟

الميل = $\frac{٣}{٢}$ ويمثل معدل التغير في رسم التأجير بالنسبة إلى مدة التأجير

(ب) قدّر المبلغ الذي سيدفعه الشخص لاستئجار فيلم مدة عشرة أيام.

ص = $\frac{٣}{٢}$ س

ص = $\frac{٣}{٢}$ × ١٠ = ١٥ دينار

(٢٥) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-س، ص)، (٣س، -ص)

م = $\frac{ص + ص}{س - ٣س}$ = $\frac{٢ص}{-٢س}$

في التمرينين (٢٦ - ٢٧)، هل النقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة؟

(٢٦) أ(٤، ٢)، ب(-٣، ٢)، جـ(٢، ٥).

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢-٢}{-٣-٤}$ = ٠

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٥-٢}{٢+٣}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ النقاط أ، ب، جـ ليست على استقامة واحدة

---

(٢٧) أ(١، -٢)، ب(-١، -٥)، جـ(٥، ٤).

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٤+٥}{٥+١}$ = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-٥+٢}{-١-١}$ = $\frac{-٣}{-٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

* (٢٨) أوجد ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = ٣س + ٧، هل هذا المستقيم متوازي مع المستقيم: س = -٣ص + ٢١؟

ص = ٣س + ٧

ميله = ٣ ← ميل المحوري = $\frac{١}{٣}$

∴ الميل = $\frac{١}{٣}$ ∴ ليسا متوازيين

نعم لأن

-٣ص = س - ٢١

ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ٧

م = $\frac{-١}{٣}$

(٢٩) أوجد ميل مستقيم متعامد مع المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

م = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

ميل المحوري = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٣}$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

معادلة الخط المستقيم

Equation of a Straight Line

المجموعة الأولى: أسئلة أساسية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم إذا علم:

(أ) يمر بالنقطة (٥، ٢) وميله = ٣.

(ص - ٢) = ٣ (س - ٥)

ص - ٢ = ٣س - ١٥ ⟸ ص - ٣س + ١٣ = ٠

(ب) يمر بالنقطة (-٢، ٤) وميله = -٢.

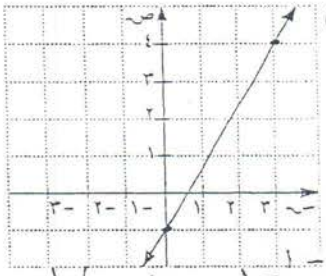
ص - ٤ = -٢ (س + ٢) ⟸ ص + ٢س = ٠

(جـ) يمر بالنقطة (١، -١) وميله = $\frac{٢}{٣}$.

ص + ١ = $\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{٢}{٣}$ ⟸ ٣ص - ٢س + ٥ = ٠

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:

(أ)



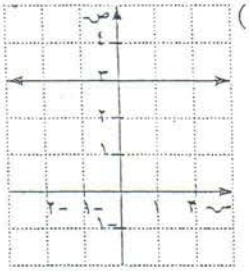
المستقيم يمر بالنقطة (٤، ٣) وميله = $\frac{٥}{٤}$

معادلة المستقيم ص: ص - ٤ = $\frac{٥}{٤}$ (س - ٣)

٤ص - ١٦ = ٥س - ١٥

٤ص - ٥س + ١ = ٠

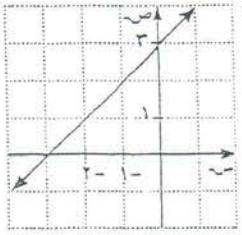
(ب)



معادلة المستقيم ص:

ص = ٣

(جـ)



المستقيم يمر بالنقطة (٠، ٣)،

ميله = ١

معادلة المستقيم ص:

ص - ٣ = ١ (س - ٠)

ص - س - ٣ = ٠

(٣) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كل من:

(أ) (٥، ٣)، (٤، ٧). الميل = $\frac{٧ - ٣}{٤ - ٥}$ = -٤ معادلة المستقيم ص: ص - ٣ = -٤ (س - ٥)

ص + ٤س - ٢٣ = ٠

(ب) (٣، -٤)، (٧، ١). الميل = $\frac{١ - (-٤)}{٧ - ٣}$ = $\frac{٥}{٤}$ معادلة المستقيم ص: ص + ٤ = $\frac{٥}{٤}$ (س - ٣)

٤ص + ١٦ = ٥س - ١٥

٤ص - ٥س + ٣١ = ٠

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٧، -١) والعمودي على الخط المستقيم: ٣س + ٢ص - ١ = ٠.

∴ المستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المستقيم المطلوب: ص + ١ = $\frac{٢}{٣}$ (س - ٧) ⟸ ٣ص - ٢س + ١٧ = صفر

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = -٢س + ٤ ويمر بالنقطة (-٢، ٣).

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١}{٢}$ معادلة المستقيم ص: (ص - ٣) = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) ⟸ ٢ص - س - ٨ = صفر

(٦) أوجد معادلة المستقيم المتوازي مع المستقيم: س = -$\frac{١}{٤}$ ص + ١٧ ويمر بنقطة الأصل.

ميل المستقيم المطلوب = ٤

معادلة المستقيم ص: ص - ٠ = ٤ (س - ٠)

∴ ص - ٤س = ٠

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم: ٢س + ص + ١ = ٠ ويمر بالنقطة (-١، ١).

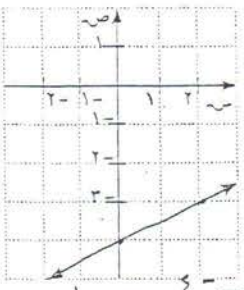
ميل المستقيم المطلوب = $\frac{1}{2}$ معادلة المستقيم: ص - ١ = $\frac{1}{2}$ (س + ١)

٢ص - س - ٣ = ٠

المجموعة ب: تمارين تعزيزية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم المرسوم في ما يلي:

(أ)



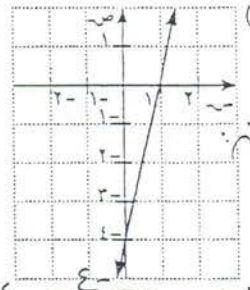
المستقيم يمر بالنقطتين: (٣، ٠) (٤، ٢)

الميل = $\frac{2-0}{4-3}$ = $\frac{1}{2}$

معادلة المستقيم: ص + ٣ = $\frac{1}{2}$ (س - ٢)

٢ص - س + ٨ = ٠

(ب)

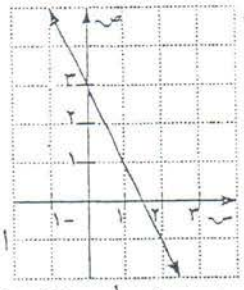


المستقيم يمر بالنقطتين: (٠، ١) (٤، ٠)

الميل = $\frac{0-1}{4-0}$ = $-\frac{1}{4}$

معادلة المستقيم: ص - ٠ = $-\frac{1}{4}$ (س - ١)

(ج)



المستقيم يمر بالنقطتين: (٣، ٠) (١، ١)

الميل = $\frac{1-0}{1-3}$ = $-\frac{1}{2}$

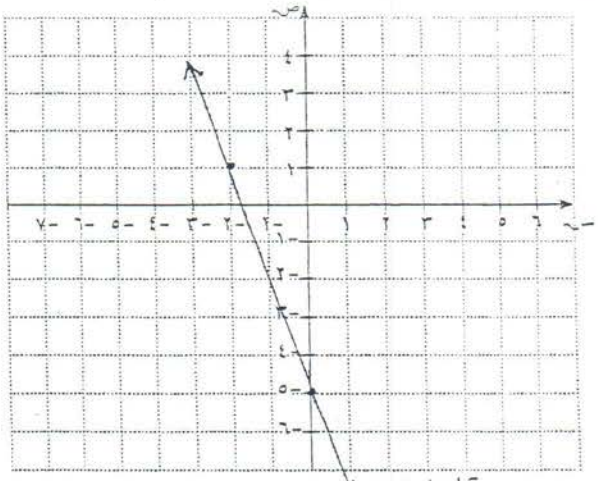
معادلة المستقيم: ص - ٠ = $-\frac{1}{2}$ (س - ٣)

٢ص - ٠ = - س + ٣

٢ص + س - ٣ = ٠

في التمارين (٢ - ٥)، أوجد معادلة كل مستقيم، ثم ارسمه: ص - ٤س + ٤ = ٠

(٢) مستقيم يمر بالنقطة (-٢، ١) وموازي للمستقيم: ص = -٣س + ١.



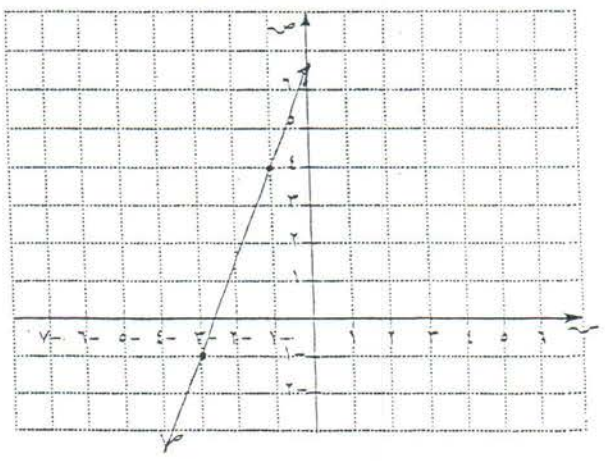
الميل = -٣

معادلة المستقيم:

ص - ١ = -٣(س + ٢)

ص + ٣س + ٥ = ٠

(٣) مستقيم يمر بالنقطة (-٣، -١)، وعمودي على المستقيم: ص = $-\frac{2}{5}$س + ١.



الميل للمستقيم المطلوب = $\frac{5}{2}$

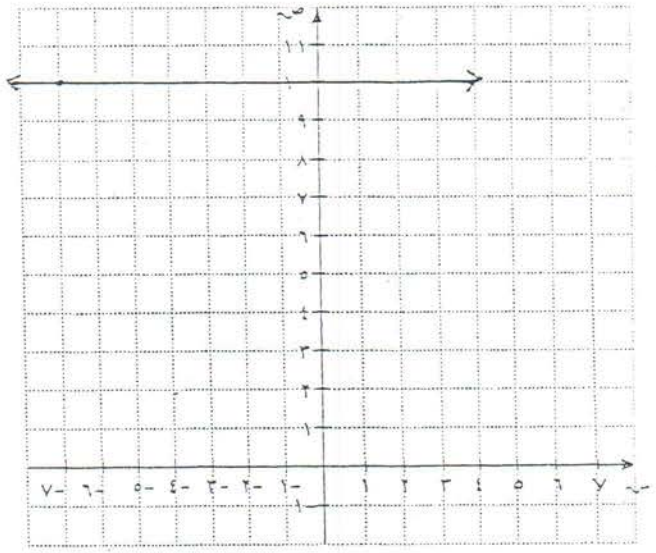
معادلة المستقيم:

ص + ١ = $\frac{5}{2}$ (س + ٣)

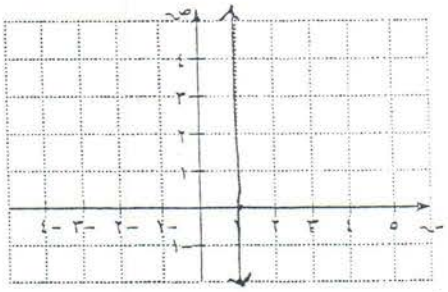
٢ص + ٢ = ٥س + ١٥

٢ص - ٥س - ١٣ = ٠

(٤) مستقيم أفقي يمر بالنقطة (-٧، ١٠).



(٥) مستقيم رأسي يمر بالنقطة $\left(١، \frac{-٢}{٧}\right)$.



(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين: (٥، ٢)، (٠، -٣). الميل = $\frac{-٣-٢}{٠-٥} = ١$

ص + ٣ = ١ × (س - ٠)

ص + ٣ = س ∴ ص = س - ٣ .

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم في كل مما يلي:

(أ) يمر بنقطة الأصل وميله ٧. ص = ٧ س

(ب) يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣، -٤). الميل = $\frac{-٤}{٣}$

معادلة المستقيم ص = $\frac{-٤}{٣}$ س .

(جـ) يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٣ وحدات، ويمر بالنقطتين (٣، ٠)، (٠، ٥)

ومن الجزء الموجب لمحور الصادات جزءًا طوله ٥ وحدات. الميل = $\frac{-٥}{٣}$.

معادلة المستقيم: ص - ٥ = $\frac{-٥}{٣}$ (س - ٠)

٣ ص + ٥ س - ١٥ = ٠

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ (٥، ٧) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤)، (٢، ١). الميل = $\frac{٤-١}{٣-٢} = ٣$

∴ معادلة المستقيم: ص - ٧ = ٣ (س - ٥)

ص - ٣ س + ٨ = ٠

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a point and a Straight line

المجموعة الأولى

في التمارين (١-٤)، معادلة المستقيم ل: ٢س - ص + ٣ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) م(-٢، -١) نقع على المستقيم (٢) ب(٠، -٢) لا تقع على المستقيم

(٣) جـ(٤، ٠) لا تقع على المستقيم (٤) د(٢، -١) لا تقع.

(٥) أوجد البعد بين النقطة جـ(٢، ١) والمستقيم: ٣س - ص - ١ = ٠

$= \frac{|٣\times ٢ - ١ - ١|}{\sqrt{٣^٢ + (-١)^٢}} = \frac{٤}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول.

(٦) أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

الصورة العامة لمعادلة المستقيم ص: ٣س - ٢ص + ٤ = ٠

البعد $= \frac{|٤|}{\sqrt{(-٢)^٢ + ٣^٢}} = \frac{٤}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول.

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢، -١) إذا كان المستقيم: ٣س - ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها.

$= \frac{|٧ + ١ - \times ٤ - ٢ \times ٣|}{\sqrt{(-٤)^٢ + ٣^٢}} = \frac{١٧}{٥}$ وحدة طول.

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، -٣) على المستقيم: -٢س + ص - ٤ = ٠

$= \frac{|-٤ - ٣ + ٢ \times ٢|}{\sqrt{(-١)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{١١}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول.

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٤، ٧) على المستقيم: ص = -٥س + ١

الصورة العامة للمستقيم ص: ٥س + ص - ١ = ٠

$= \frac{|٧ + ٥ \times -٤ - ١|}{\sqrt{٥^٢ + ١}} = \frac{١٤}{\sqrt{٢٦}}$ وحدة طول.

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (-٥، ١)

ميل المستقيم $= \frac{١ - ٣}{-٥ - ٧} = \frac{-٢}{-١٢} = \frac{١}{٦}$.

معادلة المستقيم: ص - ٣ $= \frac{١}{٦}$ (س - ٧)

٦ص - س - ١١ = ٠

∴ طول العمود $= \frac{|٦ \times ٠ - ٠ - ١١|}{\sqrt{٦^٢ + (-١)^٢}} = \frac{١١}{\sqrt{٣٧}}$ وحدة طول

المجموعة (ب) على الدرس: معادلة المستقيم

في التمارين (١-٣)، معادلة المستقيم ل: ٣ص - س + ١ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) (٣، ٣) لا تقع على المستقيم.

(٢) (٢، ٠) لا تقع على المستقيم.

(٣) (٤، ١) تقع على المستقيم.

(٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، ٥) على المستقيم: ٣س + ٤ص = ٠

$$= \frac{|3\times4+4\times5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{32}{5} \text{ وحدة طول.}$$

(٥) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨، ٠) على المستقيم: ٥س + ١٢ص = ٠

$$= \frac{|5\times8-12\times0|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{40}{13} \text{ وحدة طول.}$$

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٧) على المستقيم المار بالنقطتين: (٣، ١)، (٥، ٣).

ميل المستقيم $= \frac{3-1}{5-3} = 1$ معادلة المستقيم ص: ص - ١ = س - ٣

ص - س + ٢ = ٠

$$\text{طول العمود} = \frac{|7-3+2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ وحدة طول.}$$

(٧) أوجد بعد النقطة (٤، ٤) عن المستقيم المار بنقطة الأصل وميله $\frac{3}{4}$. معادلة المستقيم:

٤ص - ٣س = ٠

$$\text{البعد} = \frac{|4\times4-3\times4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4}{5} \text{ وحدة طول.}$$

(٨) أوجد أقصر مسافة من النقطة (٤، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٢).

ميل المستقيم $= \frac{2-0}{0-2} = -1$

معادلة المستقيم: ص - ٠ = -١ (س - ٢)

ص + س - ٢ = ٠

أقصر مسافة = البعد بين النقطة (٤، ٤) والمستقيم $= \frac{|4+4-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرين ٥-٩

معادلة الدائرة

Equation of a Circle

المجموعة الخامسة: التمارين الخامسة

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ) $٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ لا تمثل معادلة دائرة.

(ب) $(س - ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + ٤ = ٠$ لا تمثل معادلة دائرة.

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٢ص - ٨ = ٠$ تمثل معادلة دائرة.

(د) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٧ = ٠$ لا تمثل معادلة دائرة

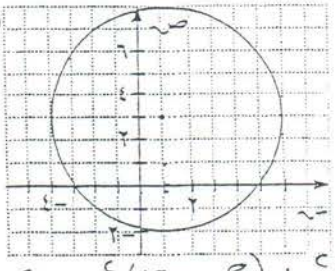
(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٠) وطول نصف القطر = ٣. $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

(ب) المركز (٤، ٥) وطول نصف القطر = ٢. $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٩$

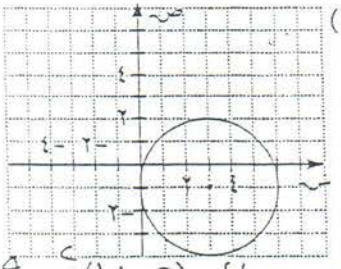
(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

(أ)



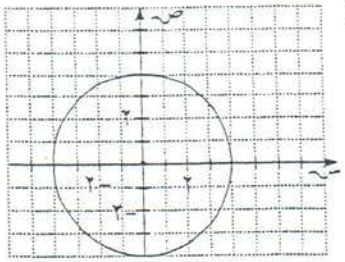
$(س - ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥$

(ب)



$(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٩$

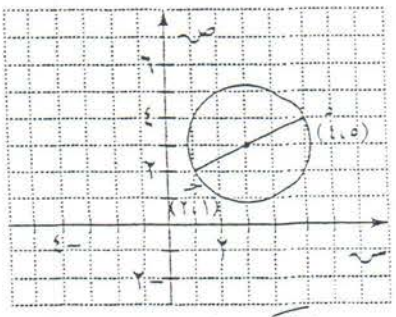
(جـ)



$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

(٤) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية، وكذلك إحداثيي مركز كل دائرة:

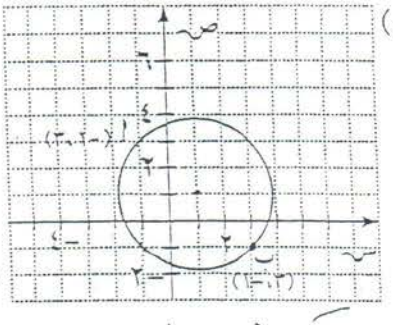
(أ)



المركز (٣، ٢)

نصف القطر $= \sqrt{٢^{٢} + ١^{٢}} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

(ب)



المركز (-١، -٢)

نصف القطر $= \sqrt{٢^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٢٠}$ وحدة طول

(٥) محور السينات هو مماس للدائرة عند النقطة (-٣، ٠)، ومركز الدائرة هو (-٣، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

نصف القطر = $\sqrt{(-٣+٣)^٢ + (٠-٤)^٢}$ = ٤ وحدة طول

معادلة الدائرة هي $(ص-٤)^٢ + (س+٣)^٢ = ١٦$.

في التمرينين (٦ - ٨) ، أوجد مركز وطول نصف قطر كلّ من الدوائر ذات المعادلات التالية:

(٦) $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ٢ص - ٨ = ٠$. المركز = (٤، -١) ، نصف القطر = ٥ وحدة طول

(٧) $س^٢ + ص^٢ - ١٦س - ١٧ = ٠$. المركز = (٨، ٠) ، نصف القطر = ٩ وحدة طول

(٨) $٥س^٢ + ٥ص^٢ - ٢٠ص - ٣٠ = ٠$. المركز = (٠، ٢) ، نصف القطر = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

$س^٢ + ص^٢ - ٤ص - ٦ = ٠$

(٩) $د_١$ ، $د_٢$ دائرتان ومعادلتاهما كالتالي:

$د_١$: $س^٢ + ص^٢ = ١$

$د_٢$: $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١$

هل الدائرتان متقاطعتان أم متماستان؟ متماستان

(١٠) أوجد معادلة مماس دائرة، معادلتها: $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٨$ عند النقطة (٠، ٢). مركز الدائرة = (٢، ٠)

ميل المستقيم المرسوم للمماس = $\frac{-٢}{٢}$ = -١ ∴ ميل المماس = ١

معادلة المماس هي $(ص - ٢) = ١(س - ٠)$ ⇒ $ص - س - ٢ = ٠$

(١١) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٢) وتمس محور الصادات عند النقطة (٠، ٢).

المركز (٣، ٢) ، نق = ٣ وحدة طول

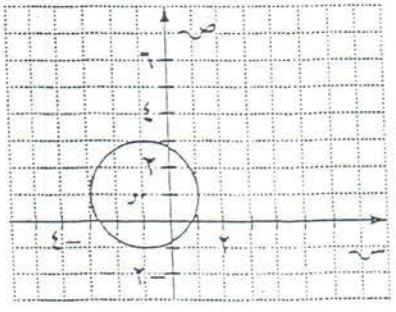
∴ معادلة الدائرة هي $(ص - ٢)^٢ + (س - ٣)^٢ = ٩$

أجب عن عشرة أسئلة على الأقل

ص ١٠٥

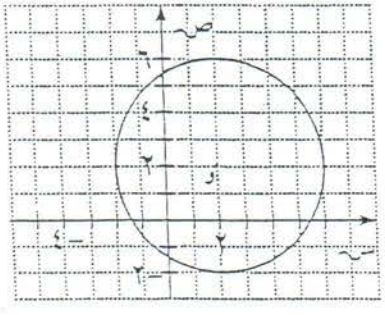
(١) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(أ)



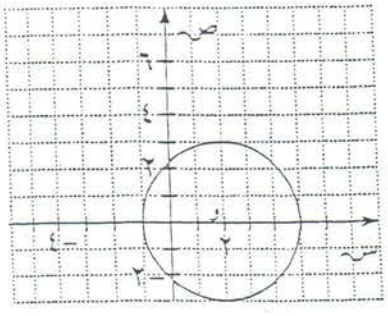
نق = ٢ وحدة

(ب)



نق = ٤ وحدة

(جـ)



نق = ٣ وحدة

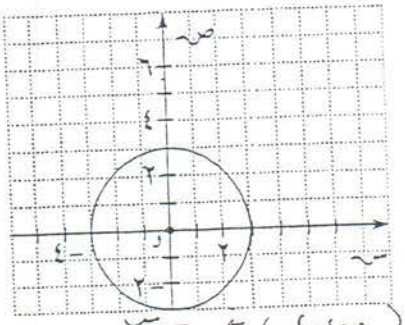
(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر التالية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٣) وطول نصف القطر = ٧ $\quad س^2 + (ص-3)^2 = 49$

(ب) المركز (-٤، ٠) وطول نصف القطر = ٣ $\quad (س+4)^2 + ص^2 = 9$

(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

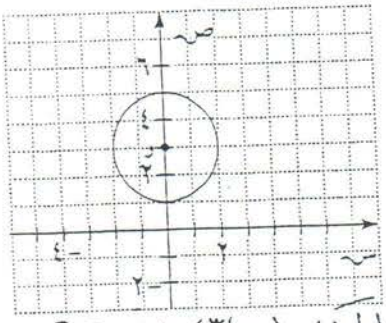
(أ)



المركز (٠، ٠) ، نق = ٣

$س^2 + ص^2 = 9$

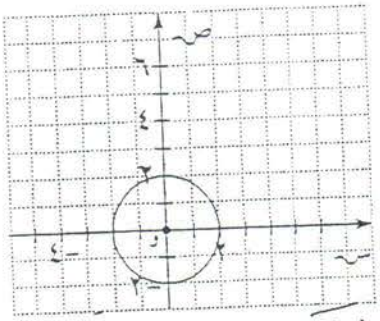
(ب)



المركز (٣، ٠) ، نق = ٢

$س^2 + (ص-3)^2 = 4$

(جـ)



المركز (٠، ٠) ، نق = ٢

$س^2 + ص^2 = 4$

(٤) اكتب معادلة كل دائرة حيث:

(أ) المركز (٠، ٤) وتمرّ بالنقطة (٣، ٤). نق = ٣ ، المركز (٠، ٤)

$س^2 + (ص-4)^2 = 9$.

(ب) المركز (٥، ١) وتمرّ بالنقطة (٦، ١). نق $= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ ، المركز (٥، ١)

$(س-5)^2 + (ص-1)^2 = 1$

في التمرينين (٥-٦)، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(٥) $2س^2 + 2ص^2 - 4س - 8ص = 0 \Leftarrow س^2 + ص^2 - 2س - 4ص = 0$ المركز (١، ٢)

نق $= \sqrt{5}$ وحدة طول.

(٦) $س^2 + ص^2 + 2س - 2ص - 16 = 0$ المركز (-١، ١) ، نق $= 3\sqrt{2}$ وحدة طول .

(٧) أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س-1)^2 + (ص+2)^2 = 10$ عند النقطة (٢، ١).

المركز (١، -٢) . ميل نصف القطر المرسوم على المماس $= \frac{-2-1}{1-2} = 3$ ∴ ميل المماس $= -\frac{1}{3}$

$(ص-1) = -\frac{1}{3}(س-2) \Leftarrow 3ص + س - 5 = 0$.

(٨) طول قطر الدائرة التي معادلتها $(س-1)^2 + (ص+1)^2 = 4$ هو:

(أ) ١ $\quad$ (ب) ٢ $\quad$ (جـ) ٤ $\quad$ (د) ١٦

في التمارين (٩-١١)، حدد وضع الدائرة هـ١ بالنسبة إلى الدائرة هـ٢.

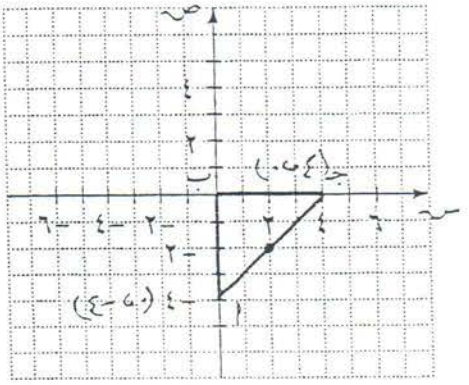
(٩) هـ١: (س - ٢)٢ + (ص - ١)٢ = ١ هـ٢: (س - ٤)٢ + (ص - ٢)٢ = ١ متباعدتان

(١٠) هـ١: س٢ + ص٢ - ٦س + ٤ص + ٤ = ٠ هـ٢: س٢ + ص٢ - ٨س - ٤ص + ١٦ = ٠ متقاطعتان

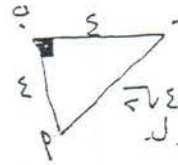
(١١) هـ١: س٢ + ص٢ - ٨س + ٢ص - ٨ = ٠ هـ٢: س٢ + ص٢ - ٥س - ٢ص + ١ = ٠ متماستان داخلياً

(١٢) أوجد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ.

(أ)



المثلث قائم الزاوية.



∴ أجـ قطر للدائرة

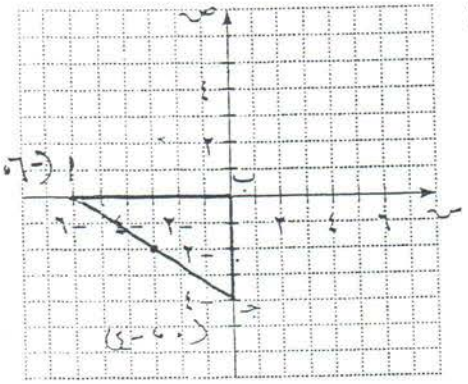
∴ نق = ½ أجـ وحدة طول.

منتصف أجـ = مركز الدائرة = (٣، -١)

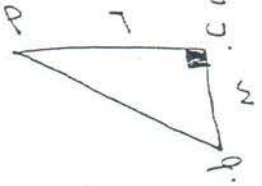
∴ معادلة الدائرة هي:

(س - ٣)٢ + (ص + ١)٢ = ٨

(ب)



المثلث أ ب جـ قائم الزاوية



∴ أجـ قطر للدائرة

(أجـ)٢ = ٦٢ + ٤٢

∴ (أجـ) = ٢√١٣

∴ نق = √١٣ وحدة طول.

مركز الدائرة = (-٣، -٢)

معادلة الدائرة هي:

(س + ٣)٢ + (ص + ٢)٢ = ١٣

اختبار الوحدة التاسعة

(١) أوجد قيمة ص إذا كانت النقطة (١، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (٠، ١). ص = ١

(٢) أوجد النقاط (١، ص) التي تبعد $\sqrt{17}$ وحدة عن النقطة (٠، ١). (٥، ١) ، (-٣، ١)

(٣) إذا كان المستقيمان: ٤س - أص = ٦، حيث أ ثابت، ٦س + ٣ص + ٢ = ٠ متعامدين. فما هي قيمة أ؟ أ = ٨

ميل = $\frac{-٤}{-٦} = \frac{٤}{٦}$ ، ميل = $\frac{-٦}{٣} = -٢$

$\therefore \frac{٤}{٦} \times -٢ = -١$ ← أ = ٨

(٤) يمر مستقيم بالنقطتين: (-٣، ٩)، (٤، ٤) ومستقيم آخر بالنقطتين: (٩، -١)، (٤، -٨). هل المستقيمان متوازيان أم متعامدان؟

ميل المستقيم الأول: $\frac{٤-٩}{٤-(-٣)} = \frac{-٥}{٧}$

$\therefore \frac{٧}{٥} \times -١ = -١$

ميل المستقيم الثاني = $\frac{-٨-(-١)}{٤-٩} = \frac{-٧}{-٥} = \frac{٧}{٥}$ ∴ المستقيمان متعامدان.

(٥) إذا كان المستقيم ٢س - ٣ص = ١٠ مماس لدائرة مركزها (-٢، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

نق = $\frac{|١٠-٤\times٣-(-٢)\times٢|}{\sqrt{٢^{٢}+(-٣)^{٢}}} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول ، معادلة الدائرة هي $(س+٢)^{٢}+(ص-٤)^{٢} = ١٣$

(٦) أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٣)، ب(٧، ٨)، جـ(-٢، ٥). د يقسم $\overline{ب جـ}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

(أ) أوجد إحداثيي د. (٤، ٦)

(ب) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أ د}$. الميل = ٢ ، معادلة $\overleftrightarrow{أ د}$ هي (ص - ٣) = ٢(س - ٢)

ص = ٢س - ١ ← ٢س - ص - ١ = ٠

(٧) لتكن معادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي: ٥س - ص + ٢ = ٠، اختر نقطة تقع على $\overleftrightarrow{أ ب}$ ولتكن جـ (٠، ٢). أوجد معادلة المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{أ ب}$ ويمر بالنقطة جـ.

ميل المستقيم المعطى = ٥ ← ميل المستقيم العمودي = $-\frac{١}{٥}$

ص - ٢ = $-\frac{١}{٥}$ (س - ٠) ← ٥ص + س - ١٠ = ٠

(٨) أ ب جـ مثلث فيه أ(٤، ٣)، ب(٨، ٥)، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يوازي محور السينات، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ يوازي محور الصادات.

(أ) أوجد إحداثيي النقطة جـ. (٤، ٥)

(ب) في السؤال (أ)، أثبت أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ.

أ ب = $\sqrt{٢^{٢}+٤^{٢}} = \sqrt{٢٠}$ ، ب جـ = $\sqrt{٤^{٢}+٢^{٢}} = \sqrt{٢٠}$ = ٤ ، أ جـ = ٢

$(أ ب)^{٢} = ٢٠$ ، $(أ جـ)^{٢}+(ب جـ)^{٢} = ١٦+٤ = ٢٠$

$\therefore (أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢}+(ب جـ)^{٢}$

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في (جـ)

(٩) أ ب جـ مثلث، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي أ (٨، ١١)، ب (١٢، ٥)، جـ (٣، ٥)، ق منتصف $\overline{أب}$، ك منتصف $\overline{أجـ}$.

(أ) أوجد إحداثيات ق، ك.

ق = (١٠، ٨) ، ك = (٥,٥، ٨)

(ب) أثبت أن $\overline{ق ك}$ // $\overline{ب جـ}$.

ميل $\overline{قك}$ = $\frac{صفر}{٤,٥}$ = صفر

ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٥-٥}{٣-١٢}$ = صفر ∴ $\overline{قك}$ // $\overline{بجـ}$

(جـ) أثبت أن ق ك = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

ع ك = $\sqrt{(٤,٥)^٢ + (٠)^٢}$ = ٤,٥

ب جـ = $\sqrt{٩^٢ + ٠^٢}$ = ٩ ∴ ق ك = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

(د) أثبت أن $\overline{أب}$ ليس عموديًا على $\overline{ب جـ}$.

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{١٢-١١}{٥-٨}$ = $\frac{١}{-٣}$ ، ميل $\overline{بجـ}$ = ... = صفر

ميل $\overline{أب}$ × ميل $\overline{بجـ}$ ≠ −١

∴ $\overline{أب}$ ليس عموديًا على $\overline{بجـ}$

تمارين إثرائية

(١) لنأخذ النقاط و(٠، ٠)، أ(٣، ١)، ب(-٣، ٣) أوجد:

(أ) معادلة المنصف العمودي لـ و ب ، لـ أ ب.

منتصف $\overline{وب}$ = (١,٥، ١,٥)

ميل $\overline{وب}$ = -١

ميل العمودي على $\overline{وب}$ = ١

معادلة المنصف العمودي على $\overline{وب}$ ص (ص - ١,٥) = س + ١,٥

ص - س - ٣ = ٠

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{-١}{٤}$ ∴ ميل العمودي = ٣

∴ معادلة المنصف العمودي لـ $\overline{أب}$ ص ص - ٣س - ٤ = ٠

(ب) معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط أ، و، ب.

نقطة تقاطع المنصفين هي مركز الدائرة ∴ المركز (-$\frac{١}{٢}$، ٣$\frac{١}{٢}$) ، نق = $\sqrt{(-\frac{١}{٢}-٠)^٢+(٣\frac{١}{٢}-٠)^٢}$ = ٣,١٥

معادلة الدائرة هي: $(س - (-\frac{١}{٢}))^٢ + (ص - ٣\frac{١}{٢})^٢ = (٣,١٥)^٢$

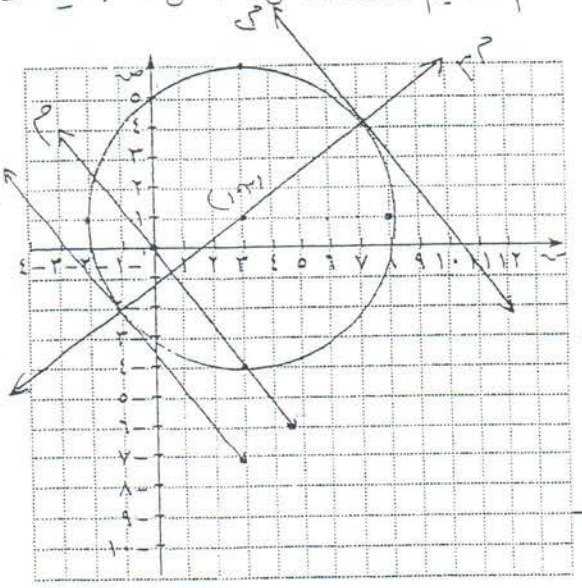
(ج) معادلة المماس على الدائرة في النقطة ب. ميل نق الحدري = $\frac{٣ - ٣\frac{١}{٢}}{-٣ - -\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٧}$ ∴ ميل المماس = -٧

∴ معادلة المماس هي ص - ٣ = -٧ (س + ٣)

ص + ٧س + ١٨ = ٠

(٢) د دائرة معادلتها: $س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٢ص - ١٥ = ٠$ ، م مستقيم معادلته: ٤س + ٣ص = ٠. ميله = $-\frac{٤}{٣}$

المركز (٣، ١) ، نق = ٥



(أ) ارسم الدائرة والمستقيم على نظام إحداثيات مشترك.

(ب) ارسم المماسين م١، م٢ للدائرة د والمتوازيان مع المستقيم م.

(جـ) أوجد معادلة المستقيم م٢ الذي يمر بمركز الدائرة د ومتعامد مع المستقيم م.

ص - ١ = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٣)

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٥}{٤}$

(د) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع أ، ب للدائرة د والمستقيم م٢: (٧، ٤) ، (-١، -٢)

(هـ) أوجد معادلتي المماسين م١، م٢.

معادلة م١

ص - (-٢) = $\frac{٤}{٣}$ (س - (-١))

ص + ٢ = $\frac{٤}{٣}$ (س + ١)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س - $\frac{١}{٣}$

معادلة م٢

(ص - ٤) = $\frac{٤}{٣}$ (س - ٧)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س + $\frac{٤}{٣}$

(٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم: ٣س - ٤ص + ١٦ = ٠.

نق = $\frac{|٢\times٠ - ٤\times٠ + ١٦|}{\sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢}} = \frac{١٦}{٥}$ معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ = (\frac{١٦}{٥})^٢$.

---

(٤) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (-١، ٣) وتمس المستقيم: ٣س - ٦ص + ١٠ = ٠.

نق = $\frac{|٣\times-١ - ٦\times٣ + ١٠|}{\sqrt{٣^٢ + (-٦)^٢}} = \frac{٩}{٣\sqrt{٥}}$ ∴ معادلة الدائرة هي $(س+١)^٢ + (ص-٣)^٢ = \frac{٩}{٥}$

---

(٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٠) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = $-\frac{٣}{٤}$س + $\frac{١١}{٤}$.

نق = $\frac{|٠ + \frac{٣}{٤}\times٢ - \frac{١١}{٤}|}{\sqrt{١^٢ + (\frac{٣}{٤})^٢}} = \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٥}{٤}} = ١$ معادلة الدائرة هي : $(س-٢)^٢ + (ص)^٢ = ١$

---

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين: س = ٢، ص = -١ و طول نصف قطرها وحدتان.

المركز (٢، -١) ، نق = ٢

معادلة الدائرة هي : $(س-٢)^٢ + (ص+١)^٢ = ٤$

---

(٧) أثبت أن المستقيمين أس + ب ص + جـ = ٠، أ د س + ب د ص + جـ = ٠ متوازيان، حيث (د ≠ ٠).

ميل المستقيم الأول : $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

ميل المستقيم الثاني : $\frac{-أ د}{ب د} = \frac{-أ}{ب}$.

تحليل البيانات ص١٢٢

Data Analysis

الحلقة ٤ تمارين ومسائل

(١) البيانات التالية هي درجات أحد الطلاب في ٦ اختبارات رياضيات، حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة:

٨٥، ٩٠، ٧٣، ٦٧، ٨٩، ٧٦. أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات. $= \frac{٨٥+٩٠+٧٣+٦٧+٨٩+٧٦}{٦} = ٨٠$ درجة

(٢) البيانات في الجدول أدناه هي درجات ٢٥ طالبًا في نهاية العام الدراسي لمادة الرياضيات، حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الدرجة	٨٥	٨٣	٩٠	٧٦	٧٨
التكرار	٤	٥	٢	٦	٨

$= \frac{٤٨٨٥+٥٨٣+٢٨٩٠+٦٧٦+٨٧٨}{٤+٥+٢+٦+٨} = \frac{٢٠١٥}{٢٥}$

أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات. $= ٨٠٫٦$ درجة

(٣) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل نبضات القلب عند ٣٣ طالبًا من الصف العاشر أثناء وقت الاستراحة.

المتوسط الحسابي $= \frac{٢٦١+٢٦٣+٢٧٦+٢٨٧+٢٨٧+٢٨٧+٢٨٧+٢٨٧+٢٨٩+٢٨٩+٢٨٩}{١+٢+٣+٤+٣+٢+٢+٣+٥+٣+٤+٣+٢}$

$= \frac{٢٤٧٥}{٣٣} =$ ٧٥ نبضة

(٤) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طالبًا.

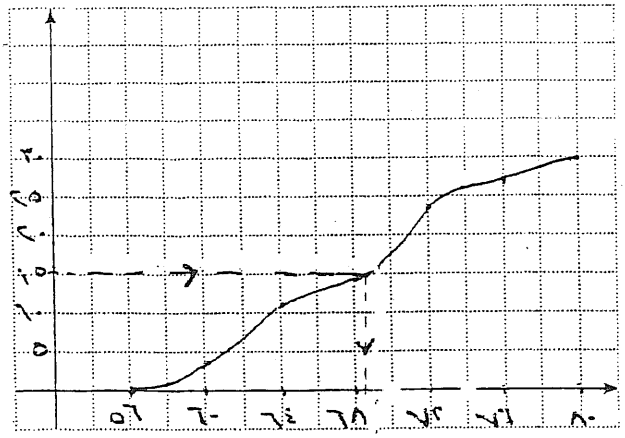
الفئة	٥٦-	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦-
التكرار	٣	٨	٣	٩	٤	٣

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأوزان.

الفئة	س ر	ت ر	ت ر س ر
٥٦-	٥٨	٣	١٧٤
٦٠-	٦٢	٨	٤٩٦
٦٤-	٦٦	٣	١٩٨
٦٨-	٧٠	٩	٦٣٠
٧٢-	٧٤	٤	٢٩٦
٧٦-	٧٨	٣	٢٣٤
المجموع		$\sum_{ر=١}^{٦} ت_ر = ٣٠$	٢٠٢٨

$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٦} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{٦} ت_ر} = \frac{٢٠٢٨}{٣٠} = ٦٧٫٦$

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد.



الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-٥٦	٣	أقل من ٦٠	٣
-٦٠	٨	أقل من ٦٤	١١
-٦٤	٣	أقل من ٦٨	١٤
-٦٨	٩	أقل من ٧٢	٢٣
-٧٢	٤	أقل من ٧٦	٢٧
-٧٦	٣	أقل من ٨٠	٣٠

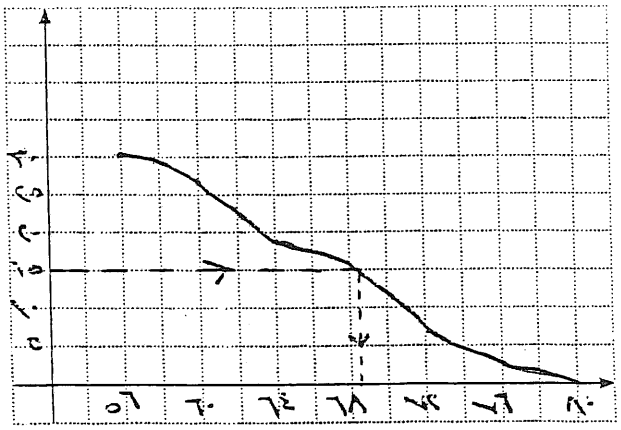
الحدود العليا للفئات

ترتيب الوسيط $= \frac{٣٠}{٢}$

$= ١٥$

الوسيط $= ٦٨,٥$ تقريباً

(جـ) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.



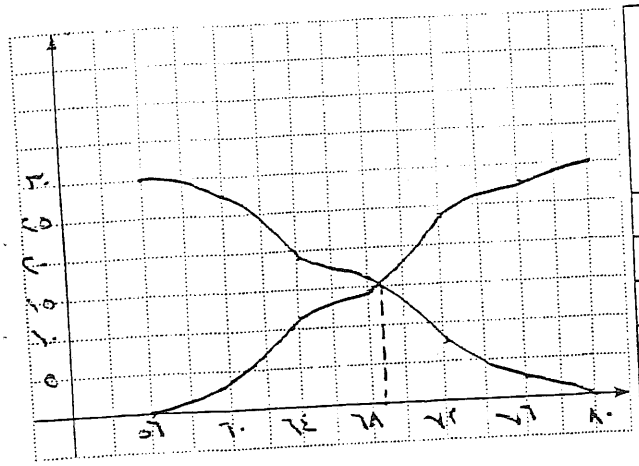
الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-٥٦	٣	٥٦ فأكثر	٣٠
-٦٠	٨	٦٠ فأكثر	٢٧
-٦٤	٣	٦٤ فأكثر	١٩
-٦٨	٩	٦٨ فأكثر	١٦
-٧٢	٤	٧٢ فأكثر	٧
-٧٦	٣	٧٦ فأكثر	٣

الحدود الدنيا للفئات

ترتيب الوسيط $= \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

الوسيط $= ٦٨,٥$ تقريباً

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل.

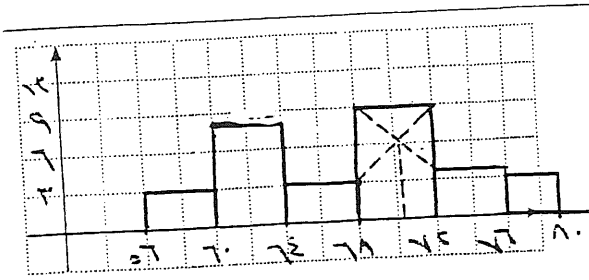


الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٦-	٣	أقل من ٦٠	٣	٥٦ فأكثر	٣٠
٦٠-	٨	أقل من ٦٤	١١	٦٠ فأكثر	٢٧
٦٤-	٣	أقل من ٦٨	١٤	٦٤ فأكثر	١٩
٦٨-	٩	أقل من ٧٢	٢٣	٦٨ فأكثر	١٦
٧٢-	٤	أقل من ٧٦	٢٧	٧٢ فأكثر	٧
٧٦-	٣	أقل من ٨٠	٣٠	٧٦ فأكثر	٣

الوسيط = ٦٨,٥ تقريباً

(هـ) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة.

(و) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام المدرج التكراري.



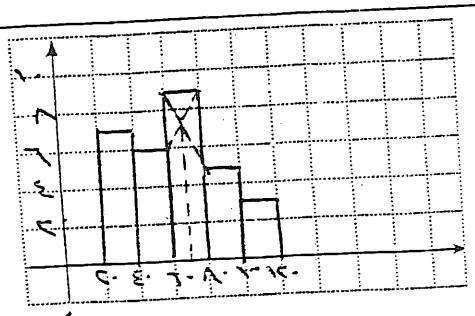
المنوال = ٧٠,٧ تقريباً

(٥) يبيّن الجدول التالي ٥ فئات تمثل توزيع المصروف اليومي لِـ ٣٠ عائلة بالدينار.

الفئة	-٢٠	-٤٠	-٦٠	-٨٠	-١٠٠
التكرار	٧	٦	٩	٥	٣

(أ) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام قانون الرافعة.

(ب) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام المدرج التكراري.



المنوال = ٦٩

ملاحظة - تم ١٤١ هـ - تم ١٢٥ لحل في الصفحة القادمة ص ١٢٤

رقم [٤] [د] ص ١١٤

الحمل الأصلي للقطة المتوالية = ٦٨

ف = ٤

ل١ = ٣

ل٢ = ٤

ل١ × س١ = ل٢ × (ف − س١)

٣ × س١ = ٤ (٤ − س١)

٣ س١ = ١٦ − ٤ س١

٣ س١ + ٤ س١ = ١٦ ⇐ ٧ س١ = ١٦

س١ = ١٦/٧ ≈ ٢,٢٨

المتوال = الحمل الأصلي للقطة المتوالية + س١ = ٦٨ + ٢,٢٨ ≈ ٧٠,٢

رقم [٥] [ج] ص ١١٤

الحمل الأصلي للقطة المتوالية = ٦٠

ل١ = ٦ ل٢ = ٤ ف = ١٠٠

ل١ × س١ = ل٢ × (ف − س١)

٦ × س١ = ٥ × (١٠٠ − س١)

٦ س١ = ٥٠٠ − ٥ س١ ⇐ ٦ س١ + ٥ س١ = ٥٠٠

١١ س١ = ٥٠٠ ⇐ س١ = ٥٠٠/١١ ≈ ٤٥,٤٥

المتوال = ٦٠ + ٤٥,٤٥ = ١٠٥,٤٥

أحضر عدد من أقرانك تعرف إجابته

(١) يبيّن الجدول التالي معدل درجات الحرارة العظمى والصغرى في دولة الكويت، حيث يقاس معدل الدرجة العظمى عند الساعة ٣ عصرًا ويقاس معدل الدرجة الصغرى عند الساعة ٣ فجرًا.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
معدل الدرجة العظمى	١٨	٢٠	٢٥	٣٠	٣٨	٤٣	٤٥	٤٥	٤٣	٣٧	٢٨	٢١
معدل الدرجة الصغرى	٧	٩	١٣	١٨	٢٣	٢٨	٣٠	٢٨	٢٥	٢٢	١٦	٩

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات العظمى والمتوسط الحسابي لمعدل الدرجات الصغرى.

ماذا تلاحظ؟

(ب) رتب تصاعديًا معدل الدرجات العظمى ومعدل الدرجات الصغرى، ثم أوجد الوسيط لكل مجموعة.

(جـ) ما المنوال لمعدل درجات الحرارة العظمى؟

ما المنوال لمعدل درجات الحرارة الصغرى؟

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأهداف الفرق في مباريات كأس العالم لسنة ٢٠٠٦.

الأهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار (عدد الفرق)	٧	١٣	١٨	١٢	١٠	٢	٢

أوجد المتوسط الحسابي للأهداف.

(٣) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري على فئات لقياسات أرجل ٥٠ رياضيًا في أحد النوادي.

الفئة	-٣٨	-٤٠	-٤٢	-٤٤
التكرار	١١	١٦	١٧	٦

(أ) أوجد المتوسط الحسابي للقياسات.

الفئة	$س_ر$	$ت_ر$	$ت_ر س_ر$
-٣٨	٣٩	١١	٤٢٩
-٤٠	٤١	١٦	٦٥٦
-٤٢	٤٣	١٧	٧٣١
-٤٤	٤٥	٦	٢٧٠
المجموع		٥٠	٢٠٨٦

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٤} ت_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{٤} ت_ر} = \frac{٢٠٨٦}{٥٠} = ٤١٫٧٢$$

رقم (١) ص ١١٥ (أ)

- المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات العظمى =

$$\frac{٢١+٢٨+٣٧+٤٣+٤٥+٤٥+٤٣+٣٨+٣٠+٢٥+٢٠+١٨}{١٢} = \frac{٣٩٣}{١٢} = ٣٢,٧٥$$

- المتوسط الحسابي لمعدل الدرجات الصغرى =

$$\frac{٩+١٦+٢٢+٢٥+٢٨+٣٠+٢٨+٢٣+١٨+١٣+٩+٧}{١٢} = \frac{٢٢٨}{١٢} = ١٩$$

رقم (١) ص ١١٥ (ب)

- الترتيب التصاعدي لمعدل الدرجات العظمى:

١٨ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٤٣ ، ٤٣ ، ٤٥ ، ٤٥

الوسيط = $\frac{٣٠+٣٧}{٢} = ٣٣,٥$

- الترتيب التصاعدي لمعدل الدرجات الصغرى:

٧ ، ٩ ، ٩ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٢٨ ، ٣٠

الوسيط = $\frac{١٨+٢٢}{٢} = ٢٠$

رقم (١) ص ١١٥ (ج)

المنوال لمعدل الدرجات العظمى = ٤٣ ، ٤٥

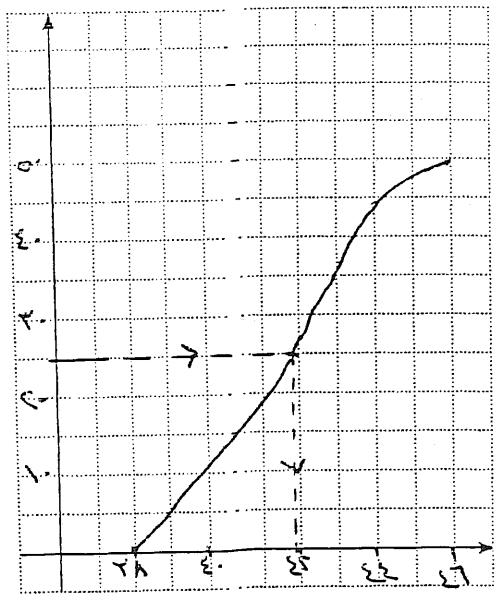
المنوال لمعدل الدرجات الصغرى = ٩ ، ٢٨

رقم (٢) ص ١١٥

المتوسط الحسابي = $\frac{٢٠×٧+١٣×١+١٨×٢+١٢×٣+١٠×٤+٢٨×٢+٣٦×٢}{٢+٢+١٠+١٢+١٨+١٣+٧} = \frac{١٤٧}{٦٤}$

$= ٢,٣$

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المجتمع الصاعد.

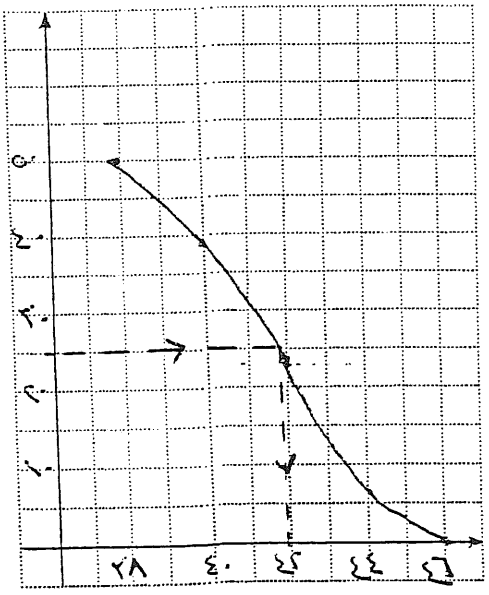


الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-٣٨	١١	أقل من ٤٠	١١
-٤٠	١٦	أقل من ٤٢	٢٧
-٤٢	١٧	أقل من ٤٤	٤٤
-٤٤	٦	أقل من ٤٦	٥٠

ترتيب الوسيط $= \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

الوسيط $\approx ٤١,٩$

(ج) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.



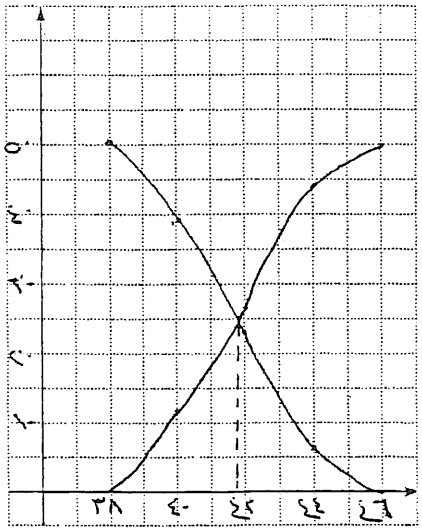
الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-٣٨	١١	٣٨ فأكثر	٥٠
-٤٠	١٦	٤٠ فأكثر	٣٩
-٤٢	١٧	٤٢ فأكثر	٢٣
-٤٤	٦	٤٤ فأكثر	٦

ترتيب الوسيط $= \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

الوسيط $\approx ٤١,٩$

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨-	١١	أقل من ٤٠	١١	٣٨ فأكثر	٥٠
٤٠-	١٦	أقل من ٤٢	٢٧	٤٠ فأكثر	٣٩
٤٢-	١٧	أقل من ٤٤	٤٤	٤٢ فأكثر	٢٣
٤٤-	٦	أقل من ٤٦	٥٠	٤٤ فأكثر	٦



الوسيط = ٤١,٨

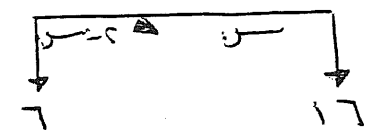
(هـ) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام قانون الرافعة .

(و) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام المدرج التكراري.

المنوال = ٤٢,٣

(هـ) الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٢

ف = ٢ ل١ = ١٦ ل+١ = ٦



ل١ × س = ل+١ (ف - س)

١٦ س = ٦ (٢ - س)

١٦ س = ١٢ - ٦ س

١٦ س + ٦ س = ١٢

٢٢ س / ٢٢ = ١٢ / ٢٢

س = ٠,٥٥

∴ المنوال = ٤٢ + ٠,٥٥

= ٤٢,٥٥

تمرّن
١٠-٢

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الأرباعيات
Quartiles

التجميع وعرض البيانات وتحليلها

(١) أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

(أ) ٧، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٠، ٥، ٤، ٣.

المدى = ١٠ - ٣ = ٧

(ب) ١٧، ٢٠، ١١، ٢٣، ١٥، ١٨، ١٩، ١٢، ١٦.

المدى = ٢٣ - ١١ = ١٢

(٢) أوجد الوسيط ($ل_٢$) والأرباعي الأدنى ($ل_١$) والأرباعي الأعلى ($ل_٣$) والمدى الأرباعي ومجمل الأعداد الخمسة للبيانات: ٥٢، ٦٠، ٥٠، ٥٤، ٥٩، ٦٥، ٦٦، ٦٤، ٩٥، ٦٢.

الترتيب التصاعدي للبيانات: ٥٠، ٥٢، ٥٤، ٥٩، ٦٠، ٦٢، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٩٥

$ل_٢ = \frac{٦٠+٦٢}{٢} = ٦١$ $ل_١ = ٥٤$ $ل_٣ = ٦٥$ المدى الأرباعي = ٦٥ - ٥٤ = ١١

مجمل الأعداد الخمسة: (٥٠، ٥٤، ٦١، ٦٥، ٩٥)

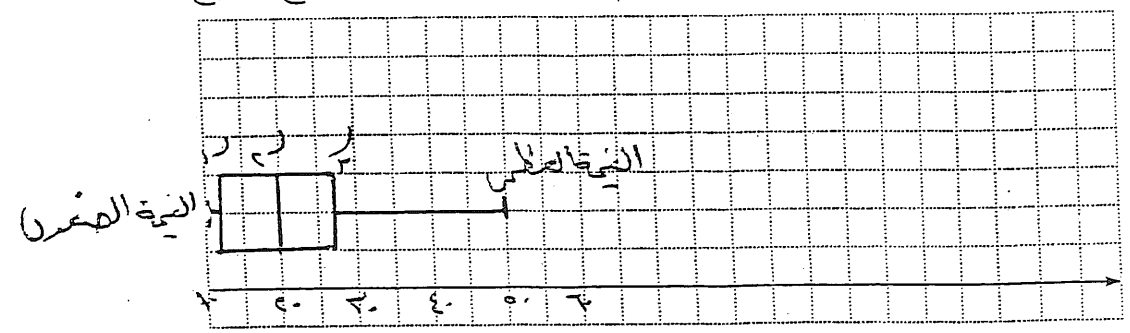
(٣) (أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للقيم التالية التي تمثل أوزان أكياس من الأرز: ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ٢٣، ٢٦، ٢٧، ٥٠.

الترتيب التصاعدي: ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ٢٣، ٢٦، ٢٧، ٥٠

$ل_٢ = \frac{١٧+٢٣}{٢} = ٢٠$ $ل_١ = \frac{١٢+١٣}{٢} = ١٢,٥$ $ل_٣ = \frac{٢٦+٢٧}{٢} = ٢٦,٥$

مجمل الأعداد الخمسة: (١١، ١٢,٥، ٢٠، ٢٦,٥، ٥٠)

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم البيانات في (أ). ماذا تستنتج؟ اشرح.



(٤) يبيّن الجدول التالي تواريخ وأطوال الأعاصير التي اجتاحت إحدى المدن في سنة ١٩٩٥.

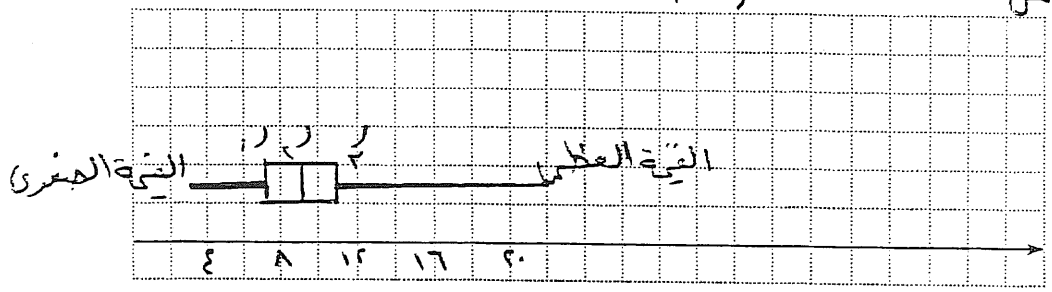
التاريخ	٤/١٧	٤/١٨	٤/١٩	٥/٦	٥/٧	٦/٨	٦/٩
طول الإعصار (بالكيلومتر)	٣	٧	١١	٢٠	١٠	٨	٩

ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين مع القيمة المتطرفة. وفسّر النتائج.

ترتيب البيانات: ٣، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ٢٠

ل٢ = ٩ ل١ = ٧ ل٣ = ١١

مجمل الأعداد الخمسة (٣، ٧، ٩، ١١، ٢٠)



مجموعة تمارين تعزيزية

(١) أوجد المدى، الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي ومجمل الأعداد الخمسة للبيانات التالية:

(أ) ٤٩، ٥٨، ٦٢، ٦٤، ٦٧، ٧٧، ٨٠.

المدى = ٨٠ − ٤٩ = ٣١ ل٢ = ٦٤ ل١ = ٥٨ ل٣ = ٧٧

المدى الأرباعي = ٧٧ − ٥٨ = ١٩ مجمل الأعداد الخمسة (٤٩، ٥٨، ٦٤، ٧٧، ٨٠)

(ب) ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٩، ١١٠.

المدى = ١١٠ − ١٠٠ = ١٠ ل٢ = $\frac{١٠٣+١٠٤}{٢}$ = ١٠٣,٥ ل١ = $\frac{١٠١+١٠٢}{٢}$ = ١٠١,٥ ل٣ = $\frac{١٠٩+١١٠}{٢}$

المدى الأرباعي = ١٠٧ − ١٠١,٥ = ٥,٥ مجمل الأعداد الخمسة (١٠٠، ١٠١,٥، ١٠٣,٥، ١٠٧، ١١٠)

(ج) ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٩، ٢٠.

المدى = ٢٠ − ١١ = ٩ ل٢ = ١٥ ل١ = $\frac{١٢+١٣}{٢}$ = ١٢,٥ ل٣ = $\frac{١٩+١٩}{٢}$ = ١٩

المدى الأرباعي = ١٩ − ١٢,٥ = ٦,٥

مجمل الأعداد الخمسة (١١، ١٢,٥، ١٥، ١٩، ٢٠)

(٢) يبيّن الجدول التالي عدد أكبر الزلازل التي حدثت في العالم حيث قوتها تخطت ٧ درجات على مقياس ريختر وذلك بين ١٩٨٥ و١٩٩٤.

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
عدد الزلازل	١٤	١٣	١٢	٨	٧	١٣	١١	٣٣	١٥	١٤

(أ) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

ترتيب البيانات تصاعدياً: ٦، ٧، ٨، ١١، ١١، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ٣٣

$ل_٢ = \frac{١١+١٣}{٢} = ١٢$

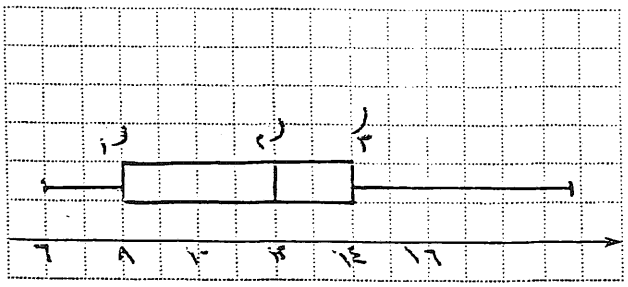
$ل_١ = ٨$

$ل_٣ = ١٤$

المدى الارباعي $= ١٤ - ٨ = ٦$

مجمل الأعداد الخمسة (٦ ، ٨ ، ١٢ ، ١٤ ، ٣٣)

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات بدون القيمة المتطرفة.



(٣) يبيّن الجدول التالي معدل دخل الفرد السنوي في بعض الدول العربية بالدولار الأميركي بحسب البنك الدولي (أعداد تقريبية).

الدولة	الإمارات العربية المتحدة	المملكة العربية السعودية	دولة الكويت	سلطنة عمان	دولة قطر	لبنان	الأردن	تونس	سورية	مملكة البحرين
معدل الدخل بآلاف الدولارات	٢٤	١٠	٢٢	٩	٢٩	٦	٢	٣	١	١٤

(أ) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

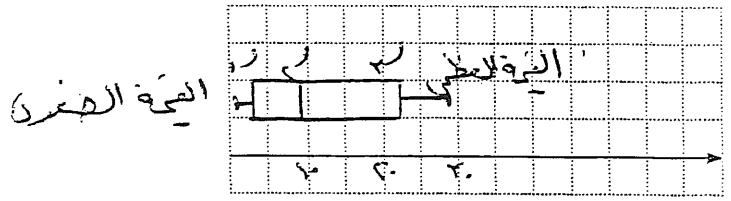
ل١ ل٢ ل٣

الترتيب التصاعدي للبيانات: ١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٠، ١٤، ٢٢، ٢٤، ٢٩

ل٢ = (١٠+٩)/٢ = ٩,٥ ل١ = ٣ ل٣ = ٢٢

المدى الأرباعي = ٢٢-٣ = ١٩ مجمل الأعداد الخمسة (١، ٣، ٩,٥، ٢٢، ٢٩)

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟ اشرح.



يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هما الأصغر من بين الوسيط والأرباعي الأعلى (أي أن هناك تقارب بين دخل الفرد في شرق الدل).

ومخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

الانحراف المعياري
Standard Deviation

المجموعة الأولى: أساسية

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

$\bar{س} = \frac{٥٢ + ٦٣ + ٥٤ + ٧٠ + ٦٦}{٥} = \frac{٣٠٥}{٥} = ٦١$

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
٥٢	−٩	٨١
٦٣	٢	٤
٥٤	−٧	٤٩
٧٠	٩	٨١
٦٦	٥	٢٥
	المجموع = ٢٤٠	

التباين $= ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢}}{ن}$

$= \frac{٢٤٠}{٥} = ٤٨$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٤٨} = ٦,٩$

(ب) ١، ٢، ١٧، ١٢، ١٥، ٨، ١٠، ١٥.

$\bar{س} = \frac{١ + ٢ + ١٧ + ١٢ + ١٥ + ٨ + ١٠ + ١٥}{٨}$

$\bar{س} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
١	−٩	٨١
٢	−٨	٦٤
١٧	٧	٤٩
١٢	٢	٤
١٥	٥	٢٥
٨	−٢	٤
١٠	٠	٠
١٥	٥	٢٥
	المجموع = ٢٥٢	

التباين $= ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢}}{ن}$

$ع^{٢} = \frac{٢٥٢}{٨} = ٣١,٥$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٣١,٥} = ٥,٦$

(ج) ١٣، ١٥، ١٧، ١٨، ١٢، ١٩، ١١.

$\bar{س} = \frac{١٣+١٥+١٧+١٨+١٢+١٩+١١}{٧} = \frac{١٠٥}{٧} = ١٥$

س − $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$
−٢	٤
٠	٠
٢	٤
٣	٩
−٣	٩
٤	١٦
−٤	١٦
المجموع = ٥٨	

التباين $= ع^{٢} = \frac{٥٨}{٧} = ٨,٣$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٨,٣} = ٢,٩$

(د) ٣٥٠، ٤٨٠، ٦١٠، ٢٣٠، ٧٢٠، ٥٨٠.

هل تتغير النتيجة إذا قسمت هذه القيم على ١٠؟ اشرح.

$\bar{س} = \frac{٣٥٠+٤٨٠+٦١٠+٢٣٠+٧٢٠+٥٨٠}{٦} = \frac{٢٩٧٠}{٦}$

$\bar{س} = ٤٩٥$

س − $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$
−١٤٥	٢١٠٢٥
−١٥	٢٢٥
١١٥	١٣٢٢٥
−٢٦٥	٧٠٢٢٥
٢٢٥	٥٠٦٢٥
٨٥	٧٢٢٥
المجموع = ١٦٢٥٥٠	

التباين $= ع^{٢} = \frac{١٦٢٥٥٠}{٦} = ٢٧٠٩١,٧$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٢٧٠٩١,٧} = ١٦٤,٥$

إذا قسمنا الأعداد على ١٠ لتتغير القيم (الانحراف المعياري الناتج لكونه هو الآخر مقسوماً على ١٠)

$\bar{س} = ٤٩,٥$

س − $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$
−١٤,٥	٢١٠,٢٥
−١,٥	٢,٢٥
١١,٥	١٣٢,٢٥
−٢٦,٥	٧٠٢,٢٥

$ع^{٢} = \frac{١٦٢,٥}{٦} = ٢٧٠٩$

$ع = \sqrt{٢٧٠٩} = ١٦,٥$

$(س - \bar{س})^2$	$س - \bar{س}$	$س$
٢١٠,٢٥	- ١٤,٥	٣٥
٢,٢٥	- ١,٥	٤٨
١٣٢,٢٥	١١,٥	٦١
٧٠٢,٢٥	- ٢٦,٥	٢٣
٥٠٦,٢٥	٢٢,٥	٧٢
٧٢,٢٥	٨,٥	٥٨
١٦٢٥,٥		

الإجابة بالخلف

(٢) تبيّن البيانات التالية درجات ٢٢ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

٧، ٩، ١٢، ١٠، ٥، ٣، ٤، ٢٣، ١٤، ١٦، ١٩، ١٧، ٢٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٨، ١٣، ٩، ٧

(أ) كوّن جدولًا تكراريًا لقيم هذه البيانات. ثمّ أوجد المتوسط الحسابي.

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
التكرار	٢	١	١	٢	١	٢	٢	١	٢	١	١	١	٢	١	١	١

المتوسط الحسابي $= \bar{س} = \frac{٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ١٤ + ١٨ + ٢٠ + ١١ + ٢٤ + ١٣ + ١٤ + ١٥ + ٢٢ + ١٧ + ١٨ + ١٩}{٢٢}$

$\bar{س} = \frac{٢٤٢}{٢٢} = ١١$

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه الدرجات. ماذا تستنتج؟

التباين $= ع^2 = \frac{٢(٤-١١)^2 + (٥-١١)^2 + (٦-١١)^2 + ٢(٧-١١)^2 + (٨-١١)^2 + ٢(٩-١١)^2 + ٢(١٠-١١)^2 + (١١-١١)^2 + ٢(١٢-١١)^2 + (١٣-١١)^2 + (١٤-١١)^2 + (١٥-١١)^2 + ٢(١٦-١١)^2 + (١٧-١١)^2 + (١٨-١١)^2 + (١٩-١١)^2}{٢٢}$

$ع^2 = \frac{٩٨ + ٣٦ + ٢٥ + ٣٢ + ٩ + ٨ + ٢ + ٠ + ٢ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٥٠ + ٣٦ + ٢٩ + ٦٤}{٢٢}$

$ع^2 = \frac{٤٤٠}{٢٢} = ٢٠$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٢٠} = ٤,٥$ تقريبًا.

(٣) يبيّن الجدول التالي الطاقة الكهربائية المستهلكة بالميغاواط/ ساعة خلال خمسة أيام متتالية في إحدى المدن.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥
الطاقة المستهلكة	٤٨,٠	٥٣,٢	٥٢,٣	٤٦,٦	٤٩,٩

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

$$\bar{س} = \frac{٤٨ + ٥٣,٢ + ٥٢,٣ + ٤٦,٦ + ٤٩,٩}{٥}$$

$$\bar{س} = \frac{٢٥٠}{٥} = ٥٠$$

$س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٤٨	-٢	٤
٥٣,٢	٣,٢	١٠,٢٤
٥٢,٣	٢,٣	٥,٢٩
٤٦,٦	-٣,٤	١١,٥٦
٤٩,٩	-٠,١	٠,٠١
		٣١,١

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{٣١,١}{٥} = ٦,٢٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{٦,٢٢} = ٢,٥$$

المجموعة العاشرة تمارين عامة

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية، ماذا تستنتج؟

(أ) ٥، ٧، ٦، ٤، ٨، ٩، ٣.

$س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٥	-١	١
٧	١	١
٦	٠	٠
٤	-٢	٤
٨	٢	٤
٩	٣	٩
٣	-٣	٩
		٢٨

$$\bar{س} = \frac{٥ + ٧ + ٦ + ٤ + ٨ + ٩ + ٣}{٧} = \frac{٤٢}{٧} = ٦$$

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{التباين}}$$

$$= \sqrt{٤} = ٢$$

(ب) ٣٤، ٤٥، ٣٧، ٤٢، ٣٦، ٤٣، ٤٤، ٣٩.

$$\bar{س} = \frac{٣٤ + ٤٥ + ٣٧ + ٤٢ + ٣٦ + ٤٣ + ٤٤ + ٣٩}{٨}$$

$$\bar{س} = ٤٠$$

س ر	س ر − س̄	(س ر − س̄)²
٣٤	−٦	٣٦
٤٥	٥	٢٥
٣٧	−٣	٩
٤٢	٢	٤
٣٦	−٤	١٦
٤٣	٣	٩
٤٤	٤	١٦
٣٩	−١	١
		١١٦

$$ع^٢ = \frac{١١٦}{٨} = ١٤,٥$$

$$ع = \sqrt{١٤,٥} \approx ٣,٨$$

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لاستهلاك الطاقة الكهربائية بالميغاواط/ ساعة طيلة شهر أغسطس في إحدى المدن:

الكمية	٣٣	٣٦	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٩	٥٠	٥٢	٥٣	٥٤
التكرار	٤	١	٣	٣	٢	٢	٢	١	٢	١	٣	٢	١	١	٢	١

(أ) أوجد المتوسط الحسابي.

$$= \frac{٣٣ \times ٤ + ٣٦ \times ١ + ٣٩ \times ٣ + ٤٠ \times ٣ + ٤١ \times ٢ + ٤٢ \times ٢ + ٤٣ \times ٢ + ٤٤ \times ١ + ٤٥ \times ٢ + ٤٦ \times ١ + ٤٧ \times ٣ + ٤٩ \times ٢ + ٥٠ \times ١ + ٥٢ \times ١ + ٥٣ \times ٢ + ٥٤ \times ١}{٤ + ١ + ٣ + ٣ + ٢ + ٢ + ٢ + ١ + ٢ + ١ + ٣ + ٢ + ١ + ١ + ٢ + ١}$$

$$\bar{س} = \frac{١٢٥٤}{٣١} = ٤٠,٥$$

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات باستخدام الآلة الحاسبة.

$$ع^٢ = \frac{٤(٣٣ - ٤٠,٥)^٢ + ٣(٣٦ - ٤٠,٥)^٢ + ٣(٣٩ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤٠ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤١ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤٢ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤٣ - ٤٠,٥)^٢ + ١(٤٤ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤٥ - ٤٠,٥)^٢ + ١(٤٦ - ٤٠,٥)^٢ + ٣(٤٧ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٤٩ - ٤٠,٥)^٢ + ١(٥٠ - ٤٠,٥)^٢ + ١(٥٢ - ٤٠,٥)^٢ + ٢(٥٣ - ٤٠,٥)^٢ + ١(٥٤ - ٤٠,٥)^٢}{٣١}$$

$$ع^٢ = ٤٩,٦ \quad \Rightarrow ع = \sqrt{٤٩,٦} = ٧,٠٥$$

(٣) يبيّن الجدول التالي متوسط استهلاك الفرد خلال سنة للطاقة الكهربائية بالكيلوواط/ ساعة وذلك من سنة ٢٠٠٠ إلى سنة ٢٠٠٨. أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
الكمية	١٢٣٠٥	١٢ ٦٧٧	١٢ ٨٣٢	١٢ ٩٩٢	١٢ ٩٤٠	١٢ ٦٧٣	١٣ ٠٦١	١٢ ٥٢٧	١٣ ١٤٢

حد رتم ٣١ ، ص ٢٩ ← لتذكر

(٤) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لكمية المياه بالسنتيلتر الموجودة في ١٠٠ عبوة. سعة العبوة الواحدة المفترضة ١٠٠ سنتيلتر.

الفترة	-٨٦	-٩٠	-٩٤	-٩٨	-١٠٢	-١٠٦
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥

أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

الفئة	س ر	ت ر	ت ر س ر
-٨٦	٨٨	٥	٤٤٠
-٩٠	٩٢	١٠	٩٢٠
-٩٤	٩٦	٣٩	٣٧٤٤
-٩٨	١٠٠	٣٢	٣٢٠٠
-١٠٢	١٠٤	٩	٩٣٦
-١٠٦	١٠٨	٥	٥٤٠
		١٠٠	٩٧٨٠

$\bar{س} = \frac{٩٧٨٠}{١٠٠} = ٩٧,٨ \simeq ٩٨$

$ع^٢ = \frac{٥(٩٨-٨٨)^٢ + ١٠(٩٨-٩٢)^٢ + ٣٩(٩٨-٩٦)^٢ + ٣٢(٩٨-١٠٠)^٢ + ٩(٩٨-١٠٤)^٢ + ٥(٩٨-١٠٨)^٢}{٥+٩+٣٢+٣٩+١٠+٥}$

$ع^٢ = \frac{٥٠٠ + ٣٦٠ + ١٥٦ + ١٢٨ + ٣٢٤ + ٥٠٠}{١٠٠} = ١٩,٦٨$

$ع = \sqrt{١٩,٦٨} = ٤,٤$

مثال (٣) ص ١٢٧

$\bar{س} = \frac{١٢٣٠٥ + ١٢٦٧٧ + ١٢٨٣٢ + ١٢٩٩٢ + ١٢٩٤٠ + ١٢٦٧٣ + ١٣٠٦١ + ١٢٥٢٧ + ١٣١٤٢}{٩}$

$\bar{س} = ١٢٧٩٤٫٣ \simeq ١٢٧٩٤$

$س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
١٢٣٠٥	-٤٨٩	٢٣٩١٢١
١٢٦٧٧	-١١٧	١٣٦٨٩
١٢٨٣٢	٣٨	١٤٤٤
١٢٩٩٢	١٩٨	٣٩٢٠٤
١٢٩٤٠	١٤٦	٢١٣١٦
١٢٦٧٣	-١٢١	١٤٦٤١
١٣٠٦١	٢٦٧	٧١٢٨٩
١٢٥٢٧	-٢٦٧	٧١٢٨٩
١٣١٤٢	٣٤٨	١٢١١٠٤
		٥٩٣٠٩٧

$ع^٢ = \frac{٥٩٣٠٩٧}{٩} = ٦٥٨٩٩٫٧$

$ع = \sqrt{٦٥٨٩٩٫٧} = ٢٥٦٫٧$ تقريباً

تمرَّنْ
١٠-٤

طرق العد
Methods of Counting

المجموعة الشاملة وعناصرها وتمثيلها بالأشكال

في التمارين (١ - ٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) كلمات مكونة من ثلاثة حروف: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل، م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟ ٣×٢×١ = ٦

(٢) الطرق الممكنة: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ مرورًا بالقرية ب؟

٣ × ٤ = ١٢

(٣) الرئيس ونائب الرئيس: يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم عدد الأزواج التي يمكن أن تكوّن من رئيس ونائب رئيس؟

٣ × ٤ = ١٢

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) أرقام الهاتف: كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علمًا بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟

٨ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = ٨ × ١٠^٦ = ٨٠٠٠٠٠٠

(٥) لوحات الترخيص: كم عدد لوحات الترخيص التي يمكن أن تكونها من رقمين يتبعهما حرفان ثم ثلاثة أرقام بدون أن تتكرر أي حروف أو أرقام؟

(٦) رمي حجر نرد: عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) ${}^{٨}ل_{٥}$

(٨) ${}^{١٢}ل_{٧}$

(٩) ${}^{١١}ق_{٥}$

(١٠) ${}^{١٨}ق_{٤}$

في التمارين (١١-١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) تكوين اللجان: سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن انتخابها؟

(١٢) شراء أقراص حاسوب مدمجة: لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدمجة فقط من بين ٤٨ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم عدد المجموعات المكونة من ثلاثة أشخاص التي يمكن توظيفها؟

المجموعات: تمارين متعددة

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) كلمات مكونة من ثلاثة حروف: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من ثلاثة حروف دون تكرارها من بين ٤ حروف ل، ع، ب، هـ؟

(٢) الطرق الممكنة: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ والرجوع إلى القرية أ مرورًا بالقرية ب في كل اتجاه؟

(٣) تذاكر الطيران: عندما تطلب تذكرة طيران يمكنك أن تحجز في الدرجة الأولى أو درجة رجال الأعمال أو الدرجة السياحية. يمكنك أيضًا أن تختار مكانك إلى جانب نافذة الطائرة أو في الممر أو في الكرسي الأوسط، إلا في حالة عدم وجود كرسي أوسط كما هو الحال في الدرجة الأولى حيث يوجد كرسيان فقط. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن تحجز بها مكانك على متن الطائرة؟ ٢ × ٢ + ٣ × ٢ = ٦ + ٩ = ١٥

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

* (٤) رقم التأمين الاجتماعي: كم عدد بطاقات التأمين الاجتماعي التي يمكن تكوينها من تسعة أرقام بدون الصفر؟

$$٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ = ٩^{٩}$$

* (٥) لوحات الترخيص: كم عدد لوحات الترخيص المكونة من خمسة رموز مكونة من ثلاثة أرقام مختلفة ليس من بينها الصفر يتبعها حرفين مختلفين؟ ٢٦ × ٢٥ × ٢٤ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ٣٨١٠٢٤

* (٦) إلقاء العملة: كم عدد النواتج الممكنة عند رمي قطعة نقود منتظمة عشر مرات متتالية؟ $٢^{١٠}$

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) $ل_{٦}^{١٨} + ق_{٣}^{٥}$ = ١٨ × ١٧ × ١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣ + $\frac{١٠!}{٥!}$ = ١٠ + ١٣٣٦٠٨٠ = ٢٦٦٠٩٠

(٨) $\frac{ل_{٧}^{١١}}{٧! \div ١٠!}$ = $\frac{١١!}{١٠! \times ١٠}$ = $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$ = ٣٣٠

(٩) $ق_{١٥}^{٢٤} - ل_{٣}^{٥}$ = $\frac{٢٤!}{١٩! \times ٥!}$ − ٣ × ٤ × ٥ = ١٣٠٧٤٤

(١٠) $ق_{١١}^{١٨}$ = $\frac{١٨!}{١٤! \times ١٦!}$ = $\frac{١٧ \times ١٨}{١ \times ٢}$ = ١٥٣

* (١١) إلقاء العملة: خلال الاقتراع وذلك بإلقاء عملة معدنية ٢٠ مرة، تم تسجيل ظهور الصورة أو الكتابة في كل مرة. كم عدد المرات (من جميع مرات الإلقاء) التي يتم فيها الحصول على ٧ صور؟

$$\binom{٢٠}{٧} = \frac{٢٠!}{١٣! \times ٧!} = \frac{١٤ \times ١٥ \times ١٦ \times ١٧ \times ١٨ \times ١٩ \times ٢٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}$$ = ٧٧٥٢٠

* (١٢) ضع $(س + ص)^{١٥٠}$ على صورة مضروب، وفسّر.

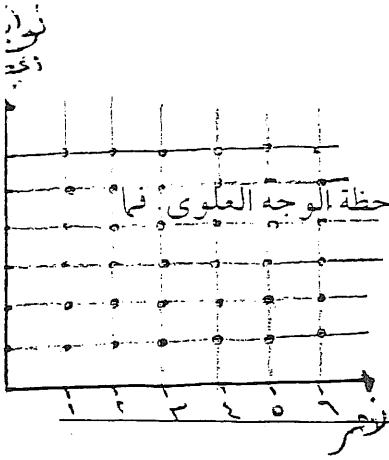
$$\frac{١٥٠!}{١٧٠! \cdot ١٨٠!}$$

تمرّن
١٠ - ٥

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الاحتمال المشروط

Conditional Probability



في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي: فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال وقوع كل حدث مما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين ٩.

$\frac{١}{٩} = \frac{٤}{٣٦}$ =

(٢) مجموع العددين الظاهرين هو عدد زوجي.

$= \frac{١٨}{٣٦} - \frac{١}{٢}$

(٣) العدد الظاهر على الحجر الأحمر أكبر من العدد الظاهر على الحجر الأخضر.

$= \frac{١٥}{٣٦} = \frac{٥}{١٢}$

في التمارين (٤-٩)، ج تتضمن عينة لألوان الحلوى التقليدية التي ينتجها مصنع للحلوى وهي:
ج = {البني، الأخضر، البرتقالي، الأحمر، البرونزي، الأصفر}.
احتمال كل حدث في ج يساوي نسبة إنتاج هذا اللون من الحلوى من إجمالي الألوان. وقد صرح المسؤول في هذا المصنع ببعض المعلومات عن احتمال الإنتاج في الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي	البرونزي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,١	٠,١	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًا من علبة مفتوحة حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أن تأخذ حلوى بالألوان التالية:

(٤) البني أو البرونزي؟ = ٠,٣ + ٠,١ = ٠,٤

(٥) الأحمر أو الأخضر أو البرتقالي؟ = ٠,٢ + ٠,١ + ٠,١ = ٠,٤

(٦) الأحمر؟ = ٠,٢

(٧) أي لون عدا الأحمر؟ $= ١ - (٠,٢) = ٠,٨$

(٨) أي لون عدا البرتقالي أو الأصفر؟ $= ١ - (٠,١ + ٠,٢) = ٠,٧$

(٩) أي لون عدا البني أو البرونزي؟ $= ١ - (٠,٣ + ٠,١) = ٠,٦$

في التمارين (١٠-١٣)، ما احتمال أن يحقق رمز عدد عشوائي مكوّن من رقمين من ١ إلى ٩ الشروط التالية؟

(١٠) رقمان عشوائيان. الأول فردي والثاني من مضاعفات العدد ٤. $\frac{٥}{٩} + \frac{٤}{٩} = \frac{٧}{٩}$

(١١) رقمان عشوائيان. الأول زوجي والثاني فردي. $\frac{٤}{٩} + \frac{٥}{٩} = ١$

(١٢) رقمان عشوائيان. كلا الرقمين أصغر من ٧. $\frac{٦}{٩} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٣٦}{٨١}$

(١٣) رقمان عشوائيان. الرقم الثاني هو الرقم الأول نفسه.

(١٤) تأجير السيارات: لدى شركة لتأجير السيارات ٢٥ سيارة للإيجار، ٢٠ منها من الحجم الكبير و٥ سيارات من الحجم المتوسط. إذا تم اختيار سيارتين بشكل عشوائي للإيجار لمدة يوم واحد، فما احتمال أن تكون السيارتان من الحجم الكبير؟ $ن(ف) = \binom{٢٥}{٢} = ٣٠٠$ $ن(أ) = \binom{٢٠}{٢} = ١٩٠$ $ل(أ) = \frac{١٩٠}{٣٠٠} = ٠,٦$

(١٥) اكتب لتتعلم: علل لماذا العبارة التالية غير صحيحة: احتمال أن يبيع بائع الحواسيب ٠، ١، ٢ أو ٣ أجهزة حاسوب في أي يوم من الأيام هو: ٠,١٢ ، ٠,٤٥ ، ٠,٣٨ ، ٠,١٥ ، ٠ بحسب الترتيب.

$٠,١٢ + ٠,٤٥ + ٠,٣٨ + ٠,١٥ + ٠ = ١,٠$ وهذا هو فقط لو كان مجموع الاحتمالات = ١

(١٦) علبة تحتوي على ٣ كرات حمراء اللون و٥ كرات بيضاء اللون. سحب سالم كرة، من دون إعادتها إلى العلبة ثمّ سحب كرة ثانية من العلبة. ليكن الحدث أ: «الكرة الأولى حمراء»، الحدث ب: «الكرة الثانية بيضاء».

١. احسب: (أ) ل (أ). $= \frac{٣}{٨}$

(ب) ل (ب/أ). $= \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{\frac{٥}{٧} \times \frac{٣}{٨}}{\frac{٣}{٨}} = \frac{٥}{٧}$

(جـ) ل (أ ∩ ب). $= ل(أ) \times ل(ب/أ) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} = \frac{١٥}{٥٦}$

٢. لنفترض أن السحب الثاني تم بعد إعادة الكرة التي سحبت أولًا.

(أ) احسب: ل(ب). = $\frac{٥}{٨}$

(ب) احسب: ل(ب/ أ). = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{\frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٨}}{\frac{٣}{٨}} = \frac{٥}{٨}$

(١٧) ليكن ل (أ) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٧، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨. احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب). = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب) = ٠,٣ + ٠,٧ − ٠,٨ = ٠,٢

(ب) ل(أ/ ب). = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{٠,٢}{٠,٧} = \frac{٢}{٧}$

(جـ) ل(ب/ أ) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$

(١٨) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٥، ل(ب) = ٠,٥.

∵ أ، ب حدثان مستقلان ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

احسب: ل(ب/ أ).

ل(ب/ أ) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{٠,٢٥}{٠,٥} = ٠,٥$ = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

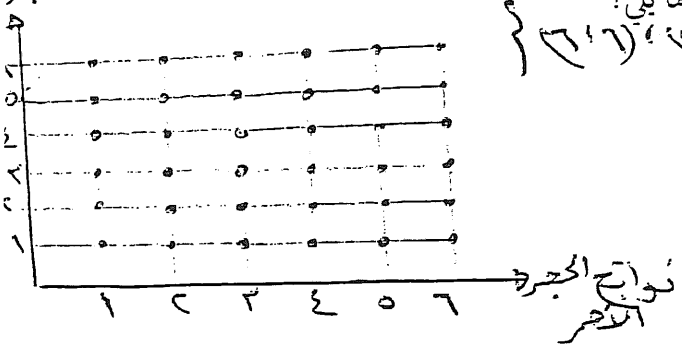
المجموعة ب: تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي لهما. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال ونوع كل حدث في ما يلي؟

ف = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، ..... (٦،٤)، (٦،٥)، (٦،٦)}

(١) مجموع العددين الظاهرين أصغر من ١٠.

= $\frac{٣٠}{٣٦} = \frac{٥}{٦}$ حدث مركب



(٢) العددان الظاهران عددان فرديان. = $\frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$ حدث مركب

(٣) العددان الظاهران عددان زوجيان. = $\frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$ حدث مركب

في التمرين (٤)، حل المسألة التالية:

(٤) رقم التأمين الاجتماعي: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم تأمين اجتماعي مكون من تسعة أرقام مختلفة ليس من بينها الصفر؟

(٥) ما احتمال اختيار رقمًا عشوائيًا واحدًا من ١ إلى ٩ يحقق الشرطين التاليين:

رقم أولي أو من مضاعفات الرقم ٦. $= \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩} = \frac{٥}{٩}$

في التمارين (٦-١١)، ينتج المصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان الموضحة بالجدول. يوضح الجدول التالي احتمال إنتاج الحلوى بحسب لونها:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًا من كل من علبتين مفتوحتين حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أخذ حلوى بالألوان التالية؟

(٦) كلتاهما بنية اللون. $= ٠,٣ \times ٠,٣ = ٠,٠٩$

(٧) كلتاهما برتقالية اللون. $٠,١ \times ٠,١ = ٠,٠١$

* (٨) واحدة حمراء وواحدة خضراء. $٠,٢ \times ٠,٢ \times ٢ = ٠,٠٤$

(٩) الأولى بنية اللون والثانية صفراء. $٠,٣ \times ٠,٢ = ٠,٠٦$

(١٠) ولا واحدة صفراء. $٠,٨$

(١١) الأولى ليست حمراء والثانية ليست برتقالية. $٠,٨ \times ٠,٩ = ٠,٧٢$

* في التمارين (١٢-١٧)، ألقيت ثلاث عملات معدنية من فئة العشرة فلوس تحمل تواريخ من ١٩٩٤ إلى ١٩٩٦. فما احتمال كل حدث مما يلي؟

(١٢) ظهور الصورة على عملة بتاريخ ١٩٩٤ فقط. $= \frac{١}{٢ \times ٢ \times ٢}$

(١٣) ظهور الصورة على عملتين بتاريخ ١٩٩٥، ١٩٩٦.

(١٤) ظهور الصورة على الثلاث عملات. $\frac{١}{٨}$

(١٥) ظهور الصورة على عملتين فقط. $\frac{٣}{٨}$

(١٦) ظهور الصورة على عملة واحدة على الأقل. $\frac{٧}{٨}$

(١٧) ظهور الصورة على عملتين على الأقل. $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

(١٨) أسباب الوفاة: قامت الحكومة بتحديد سبب واحد لكل حالة وفاة، فوجدت أن البيانات الناتجة تشير إلى أن ٤٥٪ من حالات الوفاة تسببها الأزمات القلبية ومرض في الأوعية الدموية وأن ٢٢٪ يسببها مرض السرطان.

(أ) ما احتمال أن يكون موت شخص تم اختياره بشكل عشوائي سببه مرض في الأوعية الدموية أو مرض السرطان؟ ٠٫٤٥ + ٠٫٢٢ = ٠٫٦٧

(ب) ما احتمال أن تكون وفاة هذا الشخص نتيجة لأسباب أخرى؟

١ − ٠٫٦٧ = ٠٫٣٣

(١٩) رمى حمد مرتين متتاليتين هرمًا منتظمًا مرقمًا من ١ إلى ٤ ولاحظ رقم الوجه الذي استقر عليه الهرم ويحسب ناتج جمع الأرقام التي يلاحظها.

(أ) ممَّ يتألف الناتج؟ وما هو عدد النواتج الممكنة؟

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، ... ... ، (٤، ٤)}

ن(ف) = ١٦

(ب) احسب احتمال الحدث: «ناتج الجمع يساوي ٦ علمًا أن نتيجة الرمية الأولى ٣».

$\frac{١}{١٦}$ =

(جـ) احسب احتمال الحدث: «ناتج الجمع هو أكبر من ٧ علمًا أن نتيجة الرمية الأولى ٢».

صفر

(٢٠) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٧ .

احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٢ × ٠,٧ = ٠,١٤

(ب) ل(ب/أ) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{٠,١٤}{٠,٢} = ٠,٧$

(جـ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٢ + ٠,٧ − ٠,١٤ = ٠,٧٦

(د) ل(أ/ب) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{٠,١٤}{٠,٧} = ٠,٢$

اختبار الوحدة العاشرة

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد الرجال والإناث غير المتزوجين في إحدى الدول.

الفئة (العمر)	الرجال	الإناث
٢٠-	٤٥٠٠	٣٤٠٠
٣٠-	٤٨٠	٣٠٠
٤٠-	٣٧٠	٢٤٠
٥٠-	٢٩٠	٢٥٠
٦٠-	١٨٠	٢١٠
٧٠-	١١٠	٢٢٠
٨٠-	٣٠	١٤٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

الفئة (العمر)	الرجال	الإناث	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد (رجال)	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل (إناث)
٢٠-	٤٥٠٠	٣٤٠٠	أقل من ٣٠	٤٥٠٠	٢٠ فأكثر	٤٧٦٠
٣٠-	٤٨٠	٣٠٠	أقل من ٤٠	٤٩٨٠	٣٠ فأكثر	١٣٦٠
٤٠-	٣٧٠	٢٤٠	أقل من ٥٠	٥٣٥٠	٤٠ فأكثر	١١٦٠
٥٠-	٢٩٠	٢٥٠	أقل من ٦٠	٥٦٤٠	٥٠ فأكثر	٨٧٠
٦٠-	١٨٠	٢١٠	أقل من ٧٠	٥٨٢٠	٦٠ فأكثر	٦٦٠
٧٠-	١١٠	٢٢٠	أقل من ٨٠	٥٩٣٠	٧٠ فأكثر	٤٤٠
٨٠-	٣٠	١٤٠	أقل من ٩٠	٥٩٦٠	٨٠ فأكثر	٣٠٠

(ب) أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الرجال والإناث.

تابع لـ ٢٠٠٧ [١٣٧]

رقم [١] ص ١٣٧ (ن) المتوسط الحسابي لأعمار الرجل

الفئة	س ر	ت ار	ت ار س ر
٢٠ -	٢٥	٤٠٠	١١٢٥٠٠
٣٠ -	٣٥	٤٨٠	١٦٨٠٠
٤٠ -	٤٥	٣٧٠	١٦٦٥٠
٥٠ -	٥٥	٢٩٠	١٥٩٥٠
٦٠ -	٦٥	١٨٠	١١٧٠٠
٧٠ -	٧٥	١١٠	٨٢٥٠
٨٠ -	٨٥	٣٠	٢٥٥٠
		٥٩٦٠	١٨٤٤٠٠

$\bar{س} = \frac{١٨٤٤٠٠}{٥٩٦٠} \simeq ٣٠٩$ سنة.

المتوسط الحسابي لأعمار الإناث

الفئة	س ر	ت ار	ت ار س ر
٢٠ -	٢٥	٣٤٠٠	٨٥٠٠٠
٣٠ -	٣٥	٣٠٠	١٠٥٠٠
٤٠ -	٤٥	٢٤٠	١٠٨٠٠
٥٠ -	٥٥	٢٥٠	١٣٧٥٠
٦٠ -	٦٥	٢٠٠	١٣٦٥٠
٧٠ -	٧٥	٢٢٠	١٦٥٠٠
٨٠ -	٨٥	١٤٠	١١٩٠٠
		٤٧٦٠	١٦٢١٠٠

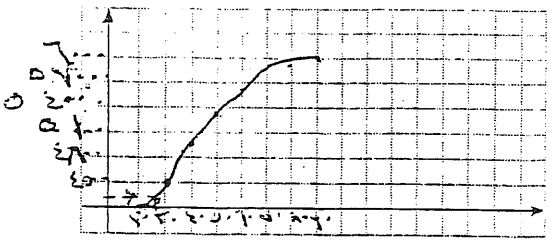
$\bar{س} = \frac{١٦٢١٠٠}{٤٧٦٠}$

$= ٣٤ر١$ سنة

١٣٧ ذكر

التكرار المتجمع الصاعد

(جـ) أوجد الوسيط لأعمار الرجال والوسيط لأعمار الإناث مستخدمًا منحنى التكرار المتجمع الصاعد لكل من أعمار الرجال والإناث. ثمّ اشرح ما يمثله كل عدد.



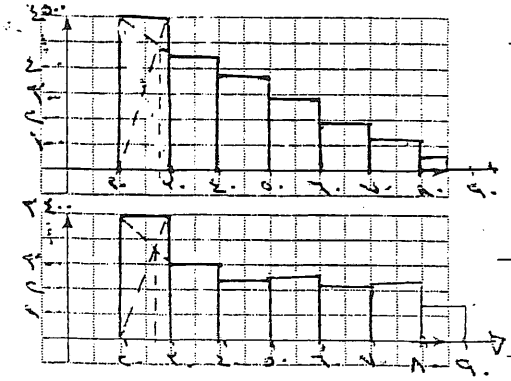
ب الوسيط (رجال) = ٥٩٦٠ / ٢ = ٢٩٨٠

الوسيط = ٢٩

ترتيب الوسيط (إناث) = ٤٧٦٠ / ٢ = ٢٣٨٠

الوسيط = ٢٨

(د) أوجد المنوال لأعمار الرجال والمنوال لأعمار الإناث باستخدام المدرج التكراري. ماذا تلاحظ؟



المنوال = ٢٨ تقريبًا (رجال)

المنوال = ٢٨ (إناث)

تقارب المنوال في الاثنين

(٢) جاءت درجات أحمد السنة الماضية في اختبار مادة العلوم حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ١٧، ١٠، ١٥، ١٢، ١٣، ٩، ١٦، ٨، ١٤، ١٦.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات $\overline{س}$.

$$\overline{س} = \frac{١٧ + ١٠ + ١٥ + ١٢ + ١٣ + ٩ + ١٦ + ٨ + ١٤ + ١٦}{١٠} = \frac{١٣٠}{١٠} = ١٣$$

(ب) أوجد الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لهذه الدرجات.

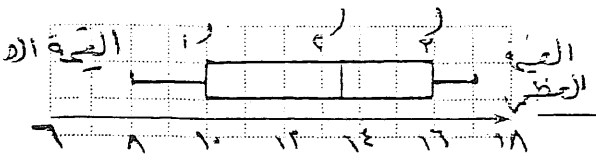
الترتيب التصاعدي: ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٦، ١٧

$ل_٢ = \frac{١٣ + ١٤}{٢} = ١٣,٥$ $ل_١ = ١٠$ $ل_٣ = ١٦$

المدى = ١٧ − ٨ = ٩ المدى الأرباعي = ١٦ − ١٠ = ٦

مجمل الأعداد الخمسة (٨، ١٠، ١٣,٥، ١٦، ١٧)

(ج) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. ماذا تلاحظ؟



الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى

(د) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات ع.

(٣) بيّنت دراسة إحصائية على ١٠٠ طالب النتيجة التالية حول جنس الطالب ولون عينيه.

	أسود	عسلي	المجموع
ولد	٣٠	٢٥	٥٥
بنت	٢٧	١٨	٤٥
المجموع	٥٧	٤٣	١٠٠

لدى اختيار طالب عشوائيًا (كل الخيارات متساوية الفرص).

نسمي: الحدث و: «الطالب هو ولد»

الحدث أ: «لون عيني الطالب أسود»

الحدث ع: «لون عيني الطالب عسلي»

الحدث ب: «الطالب هو بنت»

(أ) احسب ل(أ).

$$ل(أ) = \frac{٥٧}{١٠٠} = ٠,٥٧$$

(ب) ما احتمال أن يكون الطالب المختار ولدًا ولون عينيه أسود (ل (و ∩ أ))؟

$$ل(و \cap أ) = \frac{٣٠}{١٠٠} = ٠,٣$$

(ج) ما احتمال أن يكون الطالب المختار ولدًا ولون عينيه عسلي (ل (و ∩ ع))؟

$$ل(و \cap ع) = \frac{٢٥}{١٠٠} = ٠,٢٥$$

رقم [٩] [د] ص ١٣٩

س	ك	ك س	س − س̄	(س − س̄)²
١٧	١	١٧	٤	١٦
١٠	١	١٠	−٣	٩
١٥	١	١٥	٢	٤
١٤	١	١٤	−١	١
١٣	١	١٣	٠	٠
٩	١	٩	−٤	١٦
١٦	١	١٦	٣	٩
٨	١	٨	−٥	٢٥
١٤	١	١٤	١	١
١٦	١	١٦	٣	٩
				٩٠

س̄ = ١٣

ع² = ٩٠ / ١٠ = ٩

ع = √٩ = ٣

(د) تحقق من أن: و = (و ∩ أ) ∪ (و ∩ ع)، ما احتمال ل (و)؟

ن(و) = ٢٥ + ٣٠ = ٥٥ و = ٥٥

ل(و) = ٥٥/١٠٠ = ٠,٥٥

(هـ) في هذا السؤال، نفترض أن الطالب المختار هو ولد. فما احتمال أن يكون لون عينيه أسود. نسمي هذا الاحتمال ل(أ/ و).

ل(أ/و) = ل(أ ∩ و) / ل(و) = ٣٠/١٠٠ / ٥٥/١٠٠ = ٣٠/٥٥ حل آخر: ٣٠/٥٥

(و) أوجد علاقة بين ل (أ/ و)، ل (و)، ل(و ∩ أ).

ل(أ/و) = ل(و ∩ أ) / ل(و)

(٤) إذا كانت درجات أحد الطلاب في اختبارات مادة الرياضيات على مدار السنة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ٧، ١٠، ١٢، ٩، ١٤، ١٦، ١٥، ٨، ١٧.

(أ) أوجد المدى، الوسيط، الأرباعي الأدنى، الأرباعي الأعلى، المدى الأرباعي، مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه الدرجات.

الترتيب التصاعدي: ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧

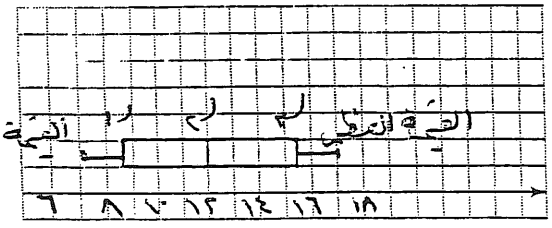
المدى = ١٧ − ٧ = ١٠ ر٢ = ١٢ ر١ = ٨,٥ ر٣ = ١٥,٥

المدى الأرباعي = ١٥,٥ − ٨,٥ = ٧

مجمل الأعداد الخمسة (٧، ٨,٥، ١٢، ١٥,٥، ١٧)

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل قيم هذه الدرجات. ماذا تلاحظ؟

الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى



تمارين إثرائية

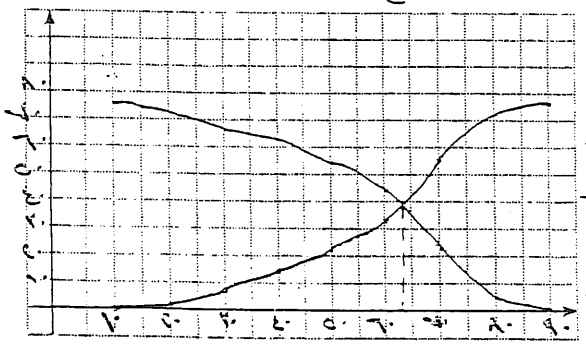
(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٧٥ رأسًا من قطيع المها العربية بالكيلوجرام.

الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠
التكرار	١	٧	٥	٨	١١	٢٢	١٧	٤

(أ) أكمل الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

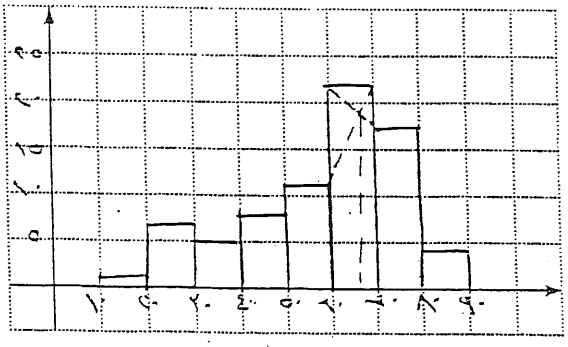
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-١٠	١	أقل من ٢٠	١	١٠ فأكثر	٧٥
-٢٠	٧	أقل من ٣٠	٨	٢٠ فأكثر	٧٤
-٣٠	٥	أقل من ٤٠	١٣	٣٠ فأكثر	٦٧
-٤٠	٨	أقل من ٥٠	٢١	٤٠ فأكثر	٦٢
-٥٠	١١	أقل من ٦٠	٣٢	٥٠ فأكثر	٥٤
-٦٠	٢٢	أقل من ٧٠	٥٤	٦٠ فأكثر	٤٣
-٧٠	١٧	أقل من ٨٠	٧١	٧٠ فأكثر	٢١
-٨٠	٤	أقل من ٩٠	٧٥	٨٠ فأكثر	٤

(ب) أوجد الوسيط لقيم هذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد و منحنى التكرار المتجمع النازل معًا.



الوسيط = ٦٣,٥ تقريباً

(جـ) أوجد المنوال لقيم هذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة وباستخدام المدرج التكراري.



المنوال = ٦٦

(د) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأوزان.

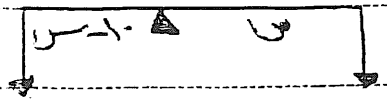
تمرين ١ (ج) ص ١٤١

الحد الأدنى للفئة المئوية = ٦٠

ف = ١٠ ، $ل_{١}$ = ١١ ، $ل_{٢}$ = ١٧

$ل_{١} - س_{ر}$ = $ل_{٠}$ (ف − $س_{ر}$)

١١ − $س_{ر}$ = ١٧ (١٠ − $س_{ر}$)



١١ − $س_{ر}$ = ١٧٠ − ١٧ $س_{ر}$

١١ $س_{ر}$ + ١٧ $س_{ر}$ = ١٧٠

٢٨ $س_{ر}$ = ١٧٠ ⇐ $س_{ر}$ = $\frac{١٧٠}{٢٨}$ ≈ ٦,١

∴ المئوال = ٦٠ + ٦,١ = ٦٦,٦

تمرين ١ (د) ص ١٤١

الفئة	س	ك	ك س
١٠ −	١٥	١	١٥
٢٠ −	٢٥	٧	١٧٥
٣٠ −	٣٥	٥	١٧٥
٤٠ −	٤٥	٨	٣٦٠
٥٠ −	٥٥	١١	٦٠٥
٦٠ −	٦٥	٢٢	١٤٣٠
٧٠ −	٧٥	١٧	١٢٧٥
٨٠ −	٨٥	٤	٣٤٠
المجموع		٧٥	٤٣٧٥

$\bar{س}$ = $\frac{٤٣٧٥}{٧٥}$

$\bar{س}$ = ٥٨,٣ تقريباً

(٢) سجل أحد الاشخاص أسعار الحاسوب بالدينار الكويتي من عدة محلات لبيع هذه الأجهزة كما يلي: ٢٥٠، ٢٤٥، ٢٦٠، ٢٥٥، ٢٤٠، ٢٦٥، ٢٣٥، ٢٧٠، ٢٦٥.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأسعار $\bar{س}$.

$$\bar{س} = \frac{٢٥٠ + ٢٤٥ + ٢٦٠ + ٢٥٥ + ٢٤٠ + ٢٦٥ + ٢٦٥ + ٢٣٥ + ٢٧٠ + ٢٦٥}{١٠} = ٢٥٥,$$

(ب) أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه الأسعار ع.

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
٢٥٠	−٥	٢٥
٢٤٥	−١٠	١٠٠
٢٦٠	٥	٢٥
٢٥٥	٠	-
٢٤٥	−١٥	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٣٥	−٢٠	٤٠٠
٢٧٠	١٥	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
		١٣٠٠

$$ع^{٢} = \frac{١٣٠٠}{١٠} = ١٣٠$$

$$ع = \sqrt{١٣٠} = ١١,٤$$

(٣) حلوى محشوة بالفول السوداني: ينتج مصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان، كما يوضح الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا أخذت ثلاث قطع من علبة واحدة، فكم عدد الألوان التي يحتمل الحصول عليها؟

(٤) تسلية: في إحدى الألعاب يتم رمي خمسة أحجار نرد متمايزة في وقت واحد وملاحظة الوجه العلوي لها. كم عدد النواتج التي يمكن تمييزها إذا كان لكل حجر لون مختلف؟

٦ × ٦ × ٦ × ٦ × ٦ = ٦^{٥}

(٥) المعلم والامتحان النهائي: أعطى معلم طلابه ٢٠ سؤالًا للاستذكار على أن يحتوي الامتحان النهائي على ثمانية أسئلة منها. كم عدد الامتحانات النهائية المختلفة التي يمكن وضعها؟

(٦) مسح للخريجين: اختارت إحدى الكليات عددًا من دفعة عام ١٩٩٦ المكونة من ٢٥٤ خريجًا من بينهم ١٧٢ سيدة، حيث التحق ١٢٤ سيدة بالدراسات الجامعية و٥٨ رجلًا. فما احتمال كل من الأحداث التالية؟

(أ) أن يكون الخريج سيدة.

(ب) أن يلتحق الخريج بالدراسات الجامعية.

(جـ) أن يكون الخريج سيدة وقد التحقت بالدراسات الجامعية.

(٧) تحديد نوع الطفل: افترض أن احتمال أن يكون الطفل المولود حديثًا من نوع معين هو ٥٠٪، في عائلة مكونة من أربعة أطفال. فما احتمال كل حدث معطى؟

(أ) كل الأطفال إناث.

(ب) كل الأطفال من نوع مختلف.

(جـ) كل الأطفال إما ذكور أو إناث.

(٨) عند إشارة المرور التي تتألف من ثلاثة ألوان لاحظنا أن:

٢٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الخضراء.

٦٥٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الصفراء (كما يطلب قانون المرور).

٩٧٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الحمراء.

قررنا مراقبة سلوك سيارة عند إشارة المرور. لنفترض أنه عند وصول السيارة إلى الإشارة، لون الإشارة عشوائي وأن احتمال أن يكون اللون هو الأخضر ٠,٦، احتمال أن يكون اللون هو الأصفر ٠,١، احتمال أن يكون اللون هو الأحمر ٠,٣.

(أ) ما احتمال أن تكون السيارة المراقبة قد توقفت؟

(ب) تجاوزت السيارة الإشارة. فما احتمال أن تكون قد تجاوزت الإشارة عندما كان لونها أحمرًا.

= ١ - ٣ر٠ = ٧ر٠

(٩) نشاط تدريبي صيفي يعرض نشاطًا لغويًا ورياضيًا. الجدول يعطي توزيعًا لـ ١٥٠ متدربًا بحسب اللغة والرياضة التي تم اختيارها:

	كرة سلة	كرة قدم	ركوب الخيل	المجموع
إنكليزي	٤٥	١٨	٢٧	٩٠
فرنسي	٣٣	٩	١٨	٦٠
المجموع	٧٨	٢٧	٤٥	١٥٠

تم اختيار متدرب عشوائيًا.

(أ) ما احتمال الحدث أ: «المتدرب يمارس كرة السلة أو يدرس الفرنسية»

$\frac{٧٨}{١٥٠} + \frac{٦٠}{١٥٠} - \frac{٣٣}{١٥٠} = \frac{١٠٥}{١٥٠} = ٧ر٠$

(ب) ما احتمال الحدث ب: «المتدرب يمارس ركوب الخيل ويدرس اللغة الفرنسية»؟

$\frac{١٨}{١٥٠} = ١٢ر٠$

(جـ) ما احتمال الحدث جـ: «يدرس اللغة الإنكليزية علمًا أنه يمارس كرة السلة»؟

$\frac{٤٥}{٦٥٠} = ٣ر٠$

(د) ما احتمال الحدث د: «يمارس كرة القدم علمًا أنه يدرس اللغة الفرنسية»؟

$= \frac{9}{150} = 0.6$

(هـ) هل الحدثان ر: «يمارس ركوب الخيل»، ن: «يدرس اللغة الإنكليزية» هما حدثان مستقلان؟

$ل(ر) = \frac{45}{150}$ $ل(ن) = \frac{90}{150}$ $ل(ر \cap ن) = \frac{27}{150}$

$ل(ر) \times ل(ن) = \frac{90}{150} \times \frac{45}{150} = 0.18$ $ل(ر \cap ن) = 0.18$

∴ الحدثان مستقلان

(١٠) أرقام الهاتف: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم هاتف مكوّن من سبعة أرقام دون تكرار أي منها؟

$\frac{7}{9} = 0.7$

(١١) ما احتمال اختيار رقم واحد عشوائي من ١ إلى ٩ يحقق الشروط التالية: عدد فردي أو من مضاعفات العدد ٤؟

$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

(١٢) في فصل الشتاء، أصابت موجة زكام ربع المواطنين. ثلث المواطنين تلقوا لقاحًا ضد الزكام، ولسبب عدم فاعلية اللقاح ١٠٠٪ نفترض أن مريضًا مصابًا بالزكام من ١٠ قد تلقى لقاحًا.

ما احتمال أن يكون مواطنًا من بين الذين تلقوا اللقاح ما زال مصابًا بالزكام؟

احتمال أن يكون مواطن تلقى اللقاح $= \frac{1}{3}$ $ل(P)$

احتمال أن يكون مواطن مصاب بالزكام $= \frac{1}{4}$ $ل(د)$

احتمال أن يكون مواطن مصاب بالزكام وتلقى لقاح $= \frac{1}{10}$ $ل(P \cap د)$

احتمال أن يكون مواطن تلقى اللقاح وما زال مصاب بالزكام $= ل(د/P)$

$= \frac{ل(P \cap د)}{ل(د)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$